PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

27 novembre 2013

1) *La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.*
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice.*

Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.
Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ________________ Cognome ________________ Classe ____________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

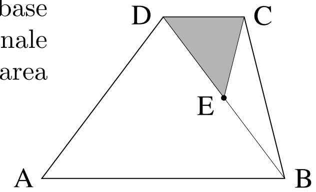
1) Fino al 2013, nella colonia penale di Zoranel la popolazione era costituita per il 60% da androidi, dei quali il 5% adibiti a vigilanza; diciamo q la percentuale di androidi di vigilanza sul totale della popolazione in quell' anno. Nel 2014 la popolazione aumentò del 10% per l'arrivo di N umani esiliati. Di quanto diminuì la percentuale di androidi di vigilanza sulla popolazione totale?
(A) non cambiò **(B)** di meno di un decimo di q **(C)** di più di un decimo di q
(D) dipende da N **(E)** dipende da quanto era numerosa la popolazione iniziale.

2) Leo lancia 7 volte una moneta (non truccata) ottenendo due volte testa e cinque volte croce. Se la lancia ancora una volta, con quale probabilità otterrà testa?
(A) $\frac{1}{8}$ **(B)** $\frac{1}{7}$ **(C)** $1-\frac{1}{2^7}$ **(D)** $\frac{35}{2^7}$ **(E)** $\frac{1}{2}$

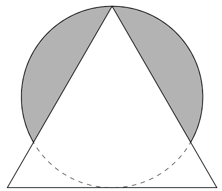
3) Sapendo che f è una funzione dispari, cioè tale che $f(x) = -f(-x)$ per ogni x, quale delle seguenti è sicuramente una funzione dispari?
(A) $f(x)-1$ **(B)** $(f(x))^2$ **(C)** $(f(x))^2+f(x)$ **(D)** $(f(x))^3+1$ **(E)** $(f(x))^3+f(x)$

4) Quanto vale $\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \ldots \cdot \log_{126}(127) \cdot \log_{127}(128)$?
(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** nessuna delle precedenti

5) In un trapezio $ABCD$ la base maggiore AB è tripla della base minore CD. Indicato con E il punto medio della diagonale BD, qual è il rapporto fra l'area del triangolo CDE e l'area del trapezio?
(A) 1/3 **(B)** 1/6 **(C)** 1/8 **(D)** 1/12
(E) non può essere determinata dai dati forniti



6) In una scultura d'arte moderna è rappresentato un cerchio nascosto in parte da un triangolo equilatero, come in figura: il cerchio ha il diametro lungo quanto l'altezza del triangolo, la quale misura $\sqrt{6}$ m. Quanto vale l'area della parte del cerchio non coperta dal triangolo ?
(A) $(\frac{3}{2}\pi - \frac{8}{\sqrt{3}})$ m^2 **(B)** $\frac{\pi}{2}$ m^2 **(C)** $(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4})$ m^2
(D) $(\frac{3}{2}\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8})$ m^2 **(E)** $\frac{3}{2}\pi$ m^2



7) Quanto è lungo il percorso più corto che passa per tutti i vertici di un cubo di lato 1 m? N.B. il percorso può anche passare all'interno del cubo.
(A) 6 m **(B)** 7 m **(C)** $(6+\sqrt{2})$ m **(D)** $(6+\sqrt{3})$ m **(E)** 8 m

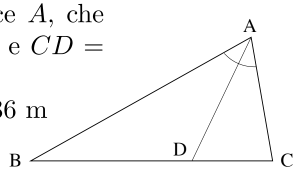
8) Data una tabella con 2 righe e 1007 colonne, scriviamo tutti i numeri da 1 a 1007 sulla prima riga in ordine crescente, e i numeri da 1008 a 2014 sulla seconda, sempre in ordine crescente. Guardiamo ora la tabella come 1007 coppie di numeri sovrapposti in verticale: in quante di esse il numero che compare nella seconda riga è un multiplo di quello che gli sta sopra?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6.

9) Alberto va in cartoleria per comprare dei quaderni e li vuole tutti di colori diversi. In cartoleria ci sono 2014 quaderni di vari colori; per ciascun colore il numero di quaderni è una potenza di 2, diversa da colore a colore. Quanti quaderni può comprare al massimo Alberto?
(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 9 **(D)** 10 **(E)** 11.

10) I lati di un triangolo misurano rispettivamente 2 cm, 3 cm e 4 cm. Calcolare l'area del cerchio inscritto nel triangolo.
(A) $\frac{5}{12}$ cm^2 **(B)** $\frac{5\pi}{36}$ cm^2 **(C)** $\frac{5\pi}{12}$ cm^2 **(D)** $\frac{2\pi}{3}$ cm^2 **(E)** π cm^2

11) Sapendo che k è un numero intero positivo fissato, per quante coppie (x, y) di numeri reali maggiori o uguali a 0 vale l'uguaglianza $x^{2k} + y^{2k} = (xy)^k$?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** infinite **(E)** dipende da k

12) Dato un triangolo ABC, si tracci la bisettrice dal vertice A, che incontra il lato BC nel punto D. Se $CD + CA = 12$ m, e $CD = \frac{1}{3}BC$, quanto misura il perimetro del triangolo?
(A) meno di 32 m **(B)** 32 m **(C)** 36 m **(D)** più di 36 m
(E) non si può determinare dai dati forniti



13) Se n è un numero naturale con 6 divisori interi positivi, quanti divisori interi positivi ha n^2? N.B.: tra i divisori di un numero contiamo anche 1 ed il numero stesso.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 15 **(D)** 36 **(E)** la risposta dipende da n

14) Il polinomio $p(x)$ ha grado maggiore o uguale a 2 ed i suoi coefficienti sono tutti numeri interi. Quale dei seguenti numeri divide certamente $p(169) - p(1)$?
(A) 25 **(B)** 32 **(C)** 36 **(D)** 49 **(E)** 56

15) Sapendo che a, b, c, d, e, f sono interi positivi, quante sono al massimo le coppie (x, y), con x e y compresi tra 0 e 1, che soddisfano il seguente sistema?

$$\begin{cases} ax^2 + bxy & = & c \\ dx^2 + exy & = & f \end{cases}$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** infinite **(E)** nessuna delle precedenti

16) Consideriamo il numero $N = 2000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1999 \cdot 2000$. Indichiamo con X il numero di zeri con cui termina N quando è scritto in base 10, e con Y il numero di zeri con cui termina N quando è scritto in base 5. Allora $X - Y$ vale:
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** 3 **(D)** 2013 **(E)** 2014

17) Come si ordinano in ordine crescente di grandezza i tre numeri 3^{33}, 4^{30}, 5^{25} ?
(A) $3^{33} < 4^{30} < 5^{25}$ **(B)** $3^{33} < 5^{25} < 4^{30}$ **(C)** $4^{30} < 3^{33} < 5^{25}$
(D) $4^{30} < 5^{25} < 3^{33}$ **(E)** $5^{25} < 4^{30} < 3^{33}$

18) Al porto sono arrivate 5 casse contenenti ciascuna 72 banane e in una di esse vi è un certo numero di banane radioattive. Si sa che scegliendo a caso due delle cinque casse e scegliendo a caso da ciascuna di esse una banana, la probabilità che una delle due banane scelte sia radioattiva è del 5 %. Quante sono le banane radioattive?
(A) 6 **(B)** 9 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** nessuna delle precedenti

19) Siano $p(x)$ e $q(x)$ due *trinomi*, dove per trinomio si intende la somma di tre monomi non nulli di gradi diversi tra loro (ad esempio $-x^5 + 3x^2 + 2x$ è un trinomio). Facciamo il prodotto $p(x)q(x)$: da quanti monomi non nulli è composto, come *minimo*, tale prodotto?
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

20) Vogliamo coprire una griglia di 5x5 quadratini con delle tessere a forma di z come in figura, che possono essere ruotate, ribaltate e sovrapposte, eventualmente anche fuoriuscendo dalla griglia (purché ogni parte di tessera che cade all'interno della griglia si sovrapponga precisamente a 1, 2, 3 o 4 quadratini). Quante tessere ci vogliono, come minimo?
(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10