

Successioni numeriche: teoria, esempi, applicazioni

Paolo Boieri

Dipartimento di Scienze Matematiche

Politecnico di Torino

paolo.boieri@polito.it

Riassunto

In questa conferenza vorrei presentare il concetto di successione, con riferimento particolare alle successioni definite per ricorrenza, descrivere alcuni problemi che si pongono nello studio delle successioni e mostrare qualche esempio, limitando l'analisi alle successioni lineari.

Abstract

In this talk I describe what is a numerical sequence (considering, in particular, recurrence sequences); then I present the main questions regarding recurrence sequences and I show some examples; only linear recurrence sequences are treated.

Premessa

Dovendo parlare a un pubblico composto per metà da insegnanti di Matematica della secondaria e per metà da docenti della scuola dell'obbligo, ho contenuto al massimo l'aspetto formale e, nei casi in cui non si può fare a meno di utilizzare gli strumenti dell'Analisi Matematica, ho cercato di spiegare ai "non addetti ai lavori" il senso delle formule che vengono presentate.

In particolare, il primo e il terzo paragrafo sono quasi un resoconto della discussione che si è svolta tra i partecipanti, stimolata da alcune domande (primo paragrafo) e da un'esperienza concreta (terzo paragrafo). La testimonianza scritta non è ovviamente così ricca come la reale discussione, ma spero che possa renderne l'idea.

1. Che cosa è una successione

Per introdurre il concetto di successione e vedere come si possa definire una successione partiamo da un esempio.

Si tratta di un tipo di domanda abbastanza usuale nelle rubriche di giochi delle riviste di enigmistica e in test di varia natura.

Quesito 1

Quale numero va inserito al posto di x per proseguire la seguente sequenza?

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, x$$

La risposta è stata unanime: $x = 127$.

Ma l'aspetto più interessante non è analizzare la risposta, ma piuttosto esaminare il procedimento con cui si è arrivati a essa.

La maggior parte dei presenti ha detto: "I numeri della sequenza sono le potenze di due a cui è sottratto uno; siccome l'ultimo termine conosciuto della sequenza è $2^6 - 1$, mi aspetto che il seguente sia $2^7 - 1 = 127$ ".

In termini formali: “Posto $a_1 = 2^1 - 1 = 1$, $a_2 = 2^2 - 1 = 3$, ..., $a_6 = 2^6 - 1 = 63$, mi aspetto che sia $a_7 = 2^7 - 1 = 127$.”

Però è stata proposta anche un'altra interpretazione: “Ogni termine della sequenza è il doppio del precedente a cui è sommato uno. Quindi mi aspetto che sia $x = 2 \cdot 63 + 1 = 127$.”

In termini formali: “Posto $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, ..., $a_6 = 63$, osservo che $a_{n+1} = 2a_n + 1$, quindi congetture che sia $a_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$.”

Esempio 2

Quale numero va inserito al posto di x per proseguire la seguente sequenza?

7, 17, 31, 65, 127, 257, x

Questo esempio più complesso ha suscitato qualche perplessità, sia nell'indicare la risposta, che la maggioranza degli interpellati ha detto essere $x=511$, sia nell'individuare il metodo per ottenerla.

La prima interpretazione è stata: “Si tratta delle potenze di due a cui viene alternativamente sottratto e sommato uno.”

In termini formali si tratta delle legge $a_n = 2^n + (-1)^n$, partendo da $n = 3$.

La seconda interpretazione è stata: “Ogni termine della sequenza è il doppio del precedente a cui alternativamente viene sottratto e sommato 3. In questo caso dobbiamo la formula è

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot (-1)^n.$$

Questi due semplici esempi ci hanno portato a capire come si definisce una successione, in particolare che essa può essere definita sia esplicitamente che per ricorrenza.

2. La definizione formale

Una successione è una funzione che ha come dominio l'insieme $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali (o, più in generale, l'insieme dei naturali maggiori o uguali a un certo numero naturale n_0).

Una successione può essere definita:

1. **esplicitamente**, dando la legge che permette di ricavare il termine a_n da n

$$a_n = f(n) \quad n \in N;$$

2. **ricorsivamente**, dando la legge che permette di ricavare il termine a_{n+1} dal termine precedente a_n . In questo caso deve essere assegnato il termine iniziale della successione (a_0 , se partiamo da $n=0$).

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \text{ assegnato}.$$

Una successione definita ricorsivamente è detta anche **sistema dinamico discreto**.

È possibile dare una definizione più generale, in cui un termine è definito sia in base al termine precedente, che all'indice n corrispondente, vale a dire utilizzare un'espressione del tipo

$$a_{n+1} = f(n, a_n), \quad a_0 \text{ assegnato}.$$

Inoltre, si possono considerare successioni ricorrenti in cui un termine dipende non solo da quello che lo precede, ma dai due precedenti o, più in generale, da un certo numero fissato di termini precedenti. Non trattiamo questo tipo di successioni, ma ci limitiamo a ricordarne un esempio. Si tratta della celeberrima successione di Fibonacci, in cui un termine è la somma dei due precedenti; bisogna in questo caso assegnare due valori iniziali:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad a_0 \text{ e } a_1 \text{ assegnati}.$$

Nel seguito ci occuperemo solo del caso più semplice, vale a dire delle successione della forma

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \text{ assegnato}. \quad (*)$$

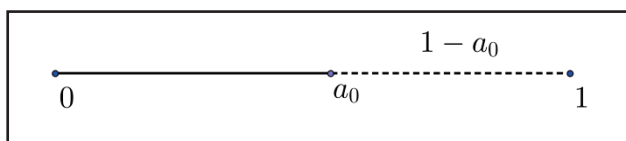
Lo studio di questo tipo di successione è importante sia nella Matematica pura, sia in numerose applicazioni (ad esempio, l'informatica o le scienze della vita); tra i vari problemi che si pongono, ne citiamo tre molto importanti.

1. Data una successione definita ricorsivamente, è possibile trovarne una rappresentazione esplicita?
2. È possibile studiare il comportamento della successione “dopo un numero sufficientemente grande di passi”? Ad esempio, studiare se i termini sono crescenti, se si avvicinano a un valore numerico oppure diventano arbitrariamente grandi?
3. Nel caso in cui i termini si “avvicinino a un valore”, è possibile determinare quanto velocemente lo approssimano? Questo problema è fondamentale per l'utilizzo delle successioni nel calcolo numerico.

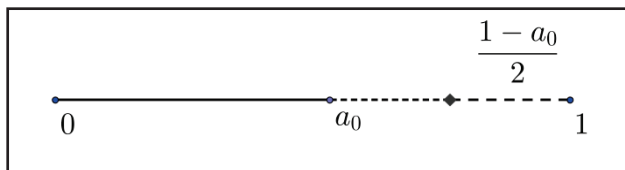
3. Una esperienza concreta

Prendiamo una striscia di carta che supponiamo rappresenti il segmento di estremi 0 e 1; evidenziamo, ad esempio, colorandolo, l'estremo della striscia che associamo a 0. Questo estremo deve essere sempre tenuto a sinistra.

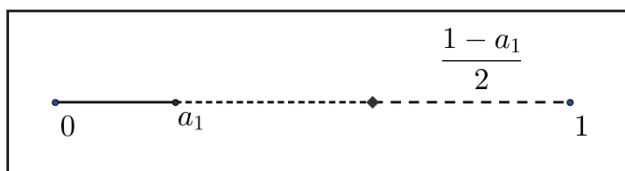
Scegliamo sulla striscia un punto a nostra scelta, che chiamiamo a_0 . La striscia risulta divisa in due parti: quella di sinistra misura a_0 , mentre quella di destra misura $1 - a_0$.



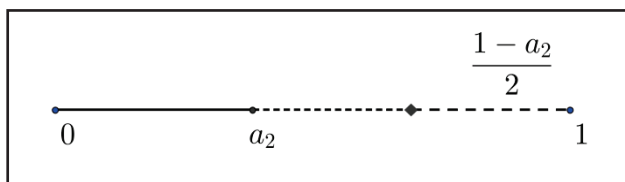
Dividiamo a metà la parte a destra; ognuna delle due metà misura quindi $\frac{1 - a_0}{2}$.



Riportiamo la misura della metà ottenuta in modo che abbia estremo nell'origine; la striscia risulta ora divisa in due parti. Quella di sinistra ha misura $a_1 = \frac{1 - a_0}{2}$. Consideriamo la parte che sta a destra; dividiamola in due parti uguali



Riportiamo nuovamente una delle della metà ottenute in modo che abbia estremo nell'origine. Ora la parte di sinistra ha misura $a_2 = \frac{1 - a_1}{2}$; dividiamo la parte di destra in due.



Iteriamo il procedimento, per quanto risulta possibile; se abbiamo segnato con la penna i valori di $a_0, a_1, a_2, \dots$ ci accorgiamo che essi si avvicinano a $1/3$; riusciamo quindi (seppure in un numero infinito di passaggi) a dividere la striscia in tre parti operando solo divisioni a metà!

Se, come si vede nelle figure precedenti, siamo partiti da a_0 maggiore di un $1/3$, allora i termini di indice pari approssimano $1/3$ per eccesso, mentre quelli di indice dispari lo approssimano per

difetto. Si verifica la situazione opposta se partiamo da a_0 minore di un $1/3$.

Se partiamo esattamente da $1/3$, allora osserviamo che il nostro procedimento fornisce valori costanti e sempre uguali a $1/3$.

Ora dobbiamo formalizzare il procedimento svolto; è immediato rendersi conto del fatto che abbiamo studiato una successione ricorsiva; si tratta della successione

$$a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}, \quad a_0 \text{ assegnato nell'intervallo } [0,1]$$

Ricordando l'espressione generale (*) di una successione ricorsiva, vediamo che la funzione f risulta essere

$$f(x) = \frac{1-x}{2}.$$

Si tratta di un caso particolare di successione lineare, una successione lineare è della forma

$$a_{n+1} = f(a_n), \text{ con } f(x) = mx + q \quad (**)$$

4. Esaminiamo il problema con *Excel*

Lo studio delle successioni ricorrenti è particolarmente facile se si utilizza un foglio elettronico; si può dire che la successione per ricorrenza sia una delle “funzionalità di base” del foglio. Infatti essa è associata a una delle operazioni più abituali che si compiono.

Consideriamo l'esempio riportato nella figura. Nella colonna A scriviamo gli interi da 0 a 14; questo è l'indice n della successione (nel nostro caso non è necessario, ma lo scriviamo per analizzare meglio i risultati che otterremo).

Nella cella B1 scriviamo un numero compreso tra zero e uno; si tratta del valore iniziale a_0 ; se nella cella B2 introduciamo la formula $=(1-B1)/2$ non facciamo altro che definire il termine seguente $a_1 = \frac{1-a_0}{2}$.

Copiando la cella B2 nella zona B3:B15 del foglio, non facciamo che iterare il procedimento, in quanto ogni cella della zona risulta definita come “uno meno la cella che gli sta sopra, diviso per due”. Modificando il valore in B1 si può vedere che cosa succede alla successione quando si varia il valore iniziale.

Nella figura abbiamo riportato nella colonna C un altro esempio di calcolo, nelle colonne D ed E i casi $a_0 = 1$ e $a_0 = 0$, mentre nella colonna F vediamo quello che succede partendo da $a_0 = 1/3$.

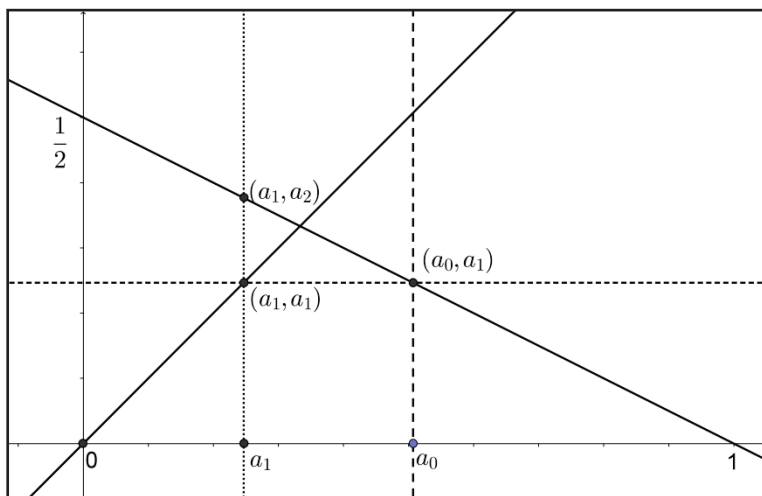
	A	B	C	D	E	F
1	0	0,751	0,114	1	0	0,333
2	1	0,125	0,443	0,000	0,500	0,333
3	2	0,438	0,279	0,500	0,250	0,333
4	3	0,281	0,361	0,250	0,375	0,333
5	4	0,359	0,320	0,375	0,313	0,333
6	5	0,320	0,340	0,313	0,344	0,333
7	6	0,340	0,330	0,344	0,328	0,333
8	7	0,330	0,335	0,328	0,336	0,333
9	8	0,335	0,332	0,336	0,332	0,333
10	9	0,333	0,334	0,332	0,334	0,333
11	10	0,334	0,333	0,334	0,333	0,333
12	11	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
13	12	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
14	13	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
15	14	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
16						

5. Esaminiamo il problema con GeoGebra

Utilizzando un software grafico come GeoGebra possiamo interpretare graficamente quanto abbiamo fatto in pratica e analizzato poi con Excel.

Tracciamo i grafici della funzione $f(x) = \frac{1-x}{2}$ e della funzione identità $y=x$; scegliamo un punto a_0 nell'intervallo $[0,1]$ e

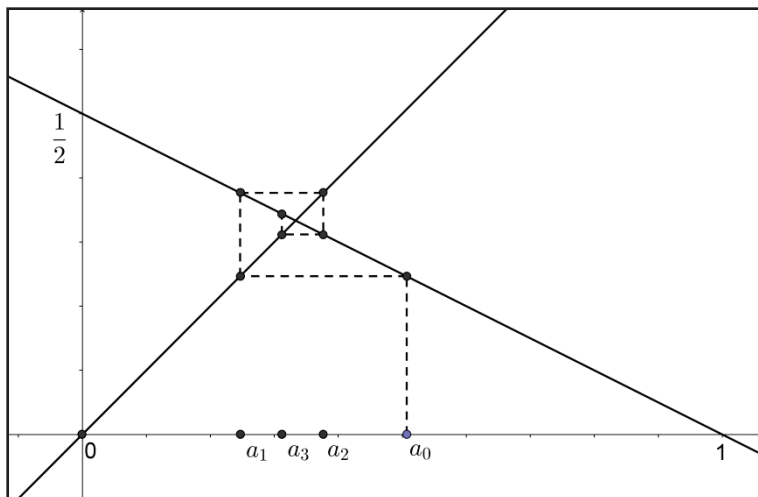
tracciamo la retta parallela all'asse delle ordinate e passante per $(a_0, 0)$. Essa interseca il grafico di f nel punto $(a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$. Se ora tracciamo la parallela (tratteggio più fine in figura) all'asse delle ascisse e passante per (a_0, a_1) , osserviamo che essa interseca la bisettrice del primo quadrante nel punto di coordinate (a_1, a_1) .



La parallela all'asse delle ordinate (punteggiata nella figura) e passante per (a_1, a_1) interseca l'asse x nel punto di ascissa a_1 e interseca il grafico di f nel punto $(a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$.

Se iteriamo il procedimento possiamo costruire i punti a_n della successione sull'asse delle ascisse e i punti (a_n, a_{n+1}) sul grafico di f .

Di solito si rappresenta questo procedimento visualizzando solamente i segmenti che congiungono i punti che via via vengono costruiti. Si ottiene il grafico della figura seguente, che viene chiamato “grafico a ragnatela” (anche se, in alcuni casi, non assomiglia a una ragnatela).



6. La determinazione esplicita di a_n in funzione di n

Abbiamo visto che uno dei problemi che si pongono a proposito delle successioni ricorsive è quello di determinare esplicitamente il termine generale della successione in funzione di n .

Vediamo come questo problema sia risolubile nel caso delle successioni lineari.

Studiamo dunque la successione (**): iniziamo considerando qualche caso particolare, per poi passare alla situazione generale.

a) $m = 1$, q qualsiasi

Calcoliamo alcuni termini:

$$a_0$$

$$a_1 = a_0 + q$$

$$a_2 = a_1 + q = a_0 + 2q$$

$$a_3 = a_2 + q = a_0 + 3q$$

È immediato congetturare (e dimostrare per induzione) che la legge generale è

$$a_n = a_0 + nq .$$

Si tratta della **successione aritmetica**; in essa la differenza tra due termini successivi è costante. Se $q=0$ abbiamo una successione costante.

b) $m \neq 1, q = 0$

Il calcolo dei primi termini è immediato

$$a_0$$

$$a_1 = ma_0$$

$$a_2 = ma_1 = m^2 a_0$$

$$a_3 = ma_2 = m^3 a_0$$

così come la congettura che la legge generale è

$$a_n = m^n a_0.$$

Si tratta della **successione geometrica**; in essa il rapporto tra due termini successivi è costante.

c) $m \neq 1, q$ qualsiasi

Possiamo passare ora al caso generale; anche qui esplicitiamo qualche termine, ottenendo

$$a_0$$

$$a_1 = ma_0 + q$$

$$a_2 = m(ma_0 + q) + q = m^2 a_0 + q(1 + m)$$

$$a_3 = m(m^2 a_0 + q(1 + m)) + q = m^3 a_0 + q(1 + m + m^2)$$

Possiamo facilmente congetturare che valga la legge:

$$a_n = m^n a_0 + q(1 + m + \dots + m^{n-1})$$

che, nel caso in cui sia $m \neq 1$, può essere scritta nella forma

$$a_n = m^n a_0 + q \frac{1 - m^n}{1 - m} = m^n \left(a_0 - \frac{q}{1 - m} \right) + \frac{q}{1 - m} \quad (***)$$

Questa formula risolve completamente il primo problema che ci siamo posti: la determinazione esplicita del termine generale a_n in funzione di n .

Nell'esempio che abbiamo dettagliato sopra si ha che $m = -\frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$; quindi l'espressione esplicita del termine generale della successione è

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)},$$

che con semplici passaggi si riduce a

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

7. Il comportamento per n grande

La formula generale che abbiamo ottenuto nel paragrafo precedente ci consente di risolvere completamente anche il secondo problema che ci siamo posti; quello di determinare il comportamento della successione per valori grandi dell'indice n .

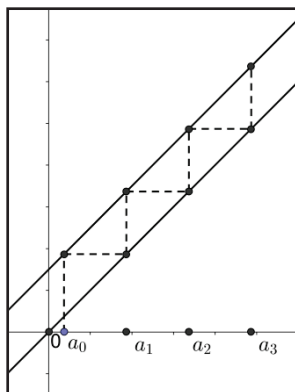
Riprendiamo i casi visti.

a) $m = 1$, q qualsiasi

La forma generale è $a_n = a_0 + nq$. Se $q = 0$ abbiamo la successione costante.

Se $q \neq 0$, siccome non facciamo che aggiungere la quantità costante q è facile concludere che, se q è positivo, i valori a_n continuano a crescere, mentre, se q è negativo, continuano a decrescere. Questo fatto è facilmente verificabile anche dal grafico “a ragnatela”, che assume l’aspetto di una scaletta, ascendente oppure discendente.

In termini formali, si dice che il limite è $+\infty$ oppure $-\infty$, a seconda che q sia positivo oppure negativo.

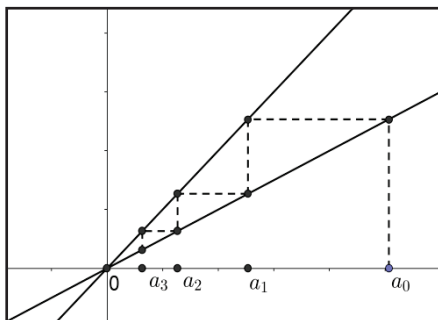


b) $m \neq 1, q = 0$ (successione geometrica)

La legge generale è $a_n = m^n a_0$. Supponendo, per semplicità che sia $a_0 = 1$, si ottiene questo risultato:

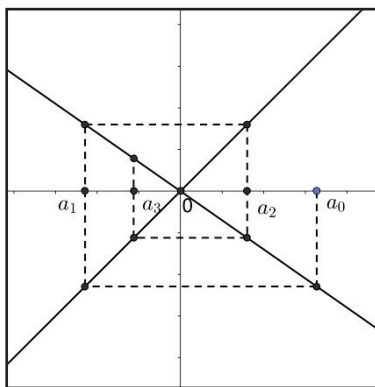
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m^n = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } m \leq -1 \\ 0 & \text{se } -1 < m < 1 \\ 1 & \text{se } m = 1 \\ +\infty & \text{se } m > 1 \end{cases}$$

Possiamo vedere come si arriva a questo risultato in modo intuitivo, ricorrendo ai grafici a regnatela; essendo $f(x) = mx$, si tratta di considerare una retta passante per l’origine e di studiare il comportamento della



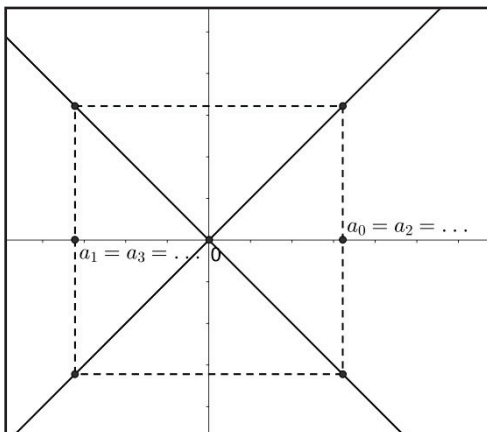
successione al variare del coefficiente angolare della retta. Nella figura precedente vediamo che cosa succede quando $0 < m < 1$; partendo da 1, la successione tende ad avvicinarsi sempre più a zero. Modificando il valore iniziale, possiamo vedere che questo continua a valere, indipendentemente dal valore iniziale. Per $a_0 > 0$ la successione è decrescente, per $a_0 < 0$ è crescente.

Anche quando il coefficiente angolare è compreso nell'intervallo $(-1,0)$ la successione (sempre indipendentemente dal valore iniziale scelto) tende a zero, stavolta alternando un valore positivo e uno negativo.



Se invece $m = -1$ si ha un comportamento particolare; si ha che $a_1 = -a_0$, $a_2 = -a_1 = a_0$ e così via. La successione assume solo due valori, uno opposto dell'altro.

In questo caso si dice che si ha un **ciclo** di ordine due.



Invitiamo il lettore a completare l'analisi, esaminando i grafici a ragnatela che si ottengono quando $m > 1$ oppure quando $m < -1$.

Osserviamo infine che se partiamo da $a_0 = 0$, si ottiene una successione costante e uguale a zero, indipendentemente dal valore di m (sempre diverso da uno).

Possiamo riassumere tutto il discorso dicendo che la successione geometrica

- se $a_0 = 0$, è costante e uguale a zero;
- se $a_0 \neq 0$, converge a zero se e solo se $-1 < m < 1$, vale a dire se e solo se $|m| < 1$.

c) $m \neq 1$, q qualsiasi

Nel caso generale (sempre escludendo la successione aritmetica) abbiamo visto che vale la formula

$$a_n = m^n a_0 + q \frac{1 - m^n}{1 - m}.$$

Utilizzando il risultato ottenuto a proposito della successione geometrica, concludiamo che se $|m| < 1$ la successione converge a un limite finito (vale a dire, tende ad avvicinarsi sempre più a una costante). Il punto a cui converge è

$$\lambda = \frac{q}{1 - m}$$

che è l'ascissa del punto di intersezione tra la retta $y = f(x) = mx + q$ e la bisettrice del primo e terzo quadrante, vale a dire la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = x \end{cases}$$

Quanto detto vale indipendentemente dal valore iniziale; se però scegliamo $a_0 = \lambda = \frac{q}{1 - m}$, la successione è costante.

Il punto λ è detto **punto fisso** della successione.

Senza entrare nei dettagli tecnici delle definizioni rigorose, possiamo osservare che il punto fisso λ ha caratteristiche diverse a seconda del valore di m , quando consideriamo valori iniziali diversi da λ stesso:

- se $|m| < 1$, i valori della successione “vengono attratti da λ ”, nel senso che si avvicinano sempre più ad esso; il punto fisso è detto **attrattivo**; siccome questo avviene qualunque sia il valore iniziale, diciamo che il **bacino di attrazione** di λ è l'intero asse reale;
- se $|m| > 1$, i valori della successione vengono “respinti” da λ , nel senso che, anche partendo vicino al punto stesso, essi tendono ad allontanarsi; il punto è chiamato **repulsivo**.

8. La velocità di convergenza

Senza entrare nei dettagli, possiamo osservare che, grazie alla (***) , possiamo determinare (ovviamente quando la successione è convergente, vale a dire quando $|m| < 1$) quanto velocemente a_n approssima λ ; possiamo valutare l'**errore di approssimazione**, che è

$$|a_n - \lambda| = \left| m^n a_0 + q \frac{1 - m^n}{1 - m} - \frac{q}{1 - m} \right| = \left| m^n \left(a_0 - \frac{q}{1 - m} \right) \right|$$

Questo errore è proporzionale alla distanza tra il valore iniziale che abbiamo scelto e il punto fisso a cui converge la successione e, a ogni passaggio, si riduce di un fattore $|m|$.

9. Due esempi

a) Il decadimento radioattivo

Una popolazione che inizialmente è costituita da 10^8 particelle radioattive decade in ragione del 20% ogni anno. Dopo quanti anni le particelle radioattive si sono ridotte a 10^6 ?

Se indichiamo con P_n il numero di particelle all'anno n , possiamo formalizzare questo fenomeno introducendo la successione geometrica di ragione 0,8:

$$\begin{cases} P_{n+1} = 0,8 \cdot P_n \\ P_0 = 10^8 \end{cases},$$

il cui limite per $n \rightarrow +\infty$ è zero. La successione può essere esplicitata come

$$P_n = 10^8 \cdot (0,8)^n.$$

Quindi, per trovare il tempo necessario per la riduzione del numero di particelle da 10^8 a 10^6 , impostiamo l'equazione

$$10^8 \cdot (0,8)^n = 10^6 \Rightarrow (0,8)^n = 10^{-2},$$

la cui soluzione è $n = \log_{0,8} 10^{-2} \approx 20,64$.

b) Un fondo pensione a contribuzione costante

Un investitore inizia un piano pensionistico individuale investendo 5000 euro in un'unica soluzione; poi ogni anno investe altri 1000 euro, senza fare prelievi, né altri versamenti.

Il capitale versato rende un interesse del 3% annuale (che viene reinvestito). Di quale capitale può disporre l'investitore dopo 35 anni?

Detto C_n il capitale al tempo n , possiamo descrivere l'accumulazione di capitale con una successione ricorsiva di tipo lineare

$$\begin{cases} C_{n+1} = 1,03 \cdot C_n + 1000 \\ C_0 = 5000 \end{cases}.$$

Abbiamo visto che possiamo scrivere esplicitamente il valore di C_n :

$$C_n = (1,03)^n \cdot 5000 + 1000 \frac{1 - (1,03)^n}{-0,03}.$$

Quindi dopo 35 anni il capitale è $C_{35} = 74531$ euro.

Bibliografia

Mentre le successioni definite esplicitamente sono trattate in tutti i testi di Analisi Matematica, quelle per ricorrenza sono in generale solo accennate. Tra i testi che le trattano più diffusamente:

1. Conti Franco, *Calcolo. Teoria e applicazioni*, McGraw-Hill, 1993
2. Geymonat Giuseppe, *Lezioni di Matematica Volume 1*, Levrotto e Bella, 1981
3. Villani Vinicio, *Matematica per discipline bio-mediche*, McGraw-Hill (quarta edizione, 2007).

Un testo in italiano dedicato interamente alle successioni per ricorrenza è:

1. Salinelli Ernesto e Tomarelli Franco, *Modelli dinamici discreti*, Springer Verlag, 2008.

In particolare i primi due capitoli di questo libro possono essere affrontati anche senza conoscenze approfondite di Analisi matematica e sono ricche di interessanti esempi.