

I sistemi dinamici non lineari: un approccio euristico

Paolo Boieri

Dipartimento di Scienze Matematiche
Politecnico di Torino
paolo.boieri@polito.it

Riassunto

Questo lavoro è la continuazione della presentazione di alcune proprietà dei sistemi dinamici discreti, iniziata con un intervento al XLI Seminario Nazionale del Centro Morin (2012).

Si esaminano i sistemi dinamici non lineari, con particolare riferimento alla successione logistica, utilizzando un approccio euristico, basato su esperimenti al computer con il foglio elettronico e con programmi di grafica e di calcolo simbolico.

Abstract

In this paper we continue the presentation of some properties of discrete dynamical systems, started with a lecture given at XLI Seminario Nazionale del Centro Morin (2012).

We consider here some non linear systems, in particular the logistic map, using a heuristic approach, based on computer experiments with spreadsheets, graphical and computer algebra software.

Premessa

In un intervento al XLI Seminario Nazionale del Centro Morin sono state introdotte (vedi l'articolo citato nella Bibliografia) le successioni per ricorrenza o sistemi dinamici discreti, vedendo alcuni esempi elementari e studiando poi in dettaglio i sistemi dinamici lineari.

In questo articolo esaminiamo alcuni aspetti dei sistemi dinamici non lineari, in particolare la successione logistica.

L'approccio è euristico e si basa su sperimentazioni al computer, con l'utilizzo di fogli di calcolo, software di tipo grafico e di calcolo simbolico.

I risultati matematici citati e tutto il contenuto di questo articolo possono essere affrontati con le conoscenze di Analisi matematica dell'ultimo anno di scuola superiore e potrebbero essere lo spunto per un lavoro individuale, almeno per studenti preparati e desiderosi di avere un'idea un po' più precisa di quello che viene descritto negli articoli divulgativi come "comportamento caotico" e come "transizione al caos".

1. Il modello logistico

L'equazione logistica nasce dallo studio della dinamica delle popolazioni; si può considerare un modello continuo, che dà luogo a una equazione differenziale, oppure un modello discreto, che porta a una successione ricorsiva; qui vediamo questo secondo aspetto.

Indichiamo con a_n il numero di individui di una popolazione al tempo n . In prima approssimazione, possiamo supporre che il numero di individui al tempo $n+1$ sia proporzionale al numero di individui al tempo n ; il coefficiente di proporzionalità tiene conto delle nascite e delle morti intervenute nel frattempo.

La dinamica della popolazione viene descritta dal sistema dinamico

$$a_{n+1} = k a_n, \quad a_0 \text{ assegnato.}$$

Questo modello, detto di crescita malthusiana, è un modello lineare, che si rivela inadatto alla descrizione della dinamica della

popolazione per tempi lunghi; esso conduce a una successione geometrica che tende all'infinito se $k > 1$, oppure a zero se $k < 1$.

Una crescita infinita è irrealistica; un modello più realistico deve tenere conto di una disponibilità limitata di risorse; si può allora descrivere l'evoluzione della popolazione utilizzando un coefficiente k non costante, ma bensì dipendente da n e decrescente all'aumentare della popolazione, come, ad esempio $k(n) = c - d \cdot a_n$, dove c e d sono opportune costanti.

Abbiamo quindi il sistema dinamico

$$a_{n+1} = (c - d a_n) a_n, \quad a_0 \text{ assegnato};$$

facciamo qualche piccolo aggiustamento delle costanti e reinterpretiamo a_n come la frazione della popolazione al tempo n rispetto alla massima popolazione sostenibile dall'ambiente; a_n è quindi una quantità variabile nell'intervallo $[0,1]$.

Il sistema dinamico può allora essere scritto nella forma

$$a_{n+1} = r a_n (1 - a_n), \quad a_0 \text{ assegnato in } [0,1]; \quad (*)$$

questa è la successione logistica; la funzione ad essa associata è

$$f(x) = rx(1-x),$$

da studiare per x appartenente all'intervallo $[0,1]$.

Il grafico di $f(x)$ è una parabola, che si annulla in $x = 0$ e in $x = 1$, la concavità è rivolta verso il basso e il vertice è nel punto $(1/2, r/4)$: affinché i valori della successione non escano dall'intervallo $[0,1]$, dobbiamo imporre la condizione $r/4 \leq 1$.

Si tratta quindi di studiare il sistema dinamico (*) al variare del parametro r , con $0 \leq r \leq 4$. Possiamo subito escludere il caso banale $r = 0$ e quindi considerare

$$0 < r \leq 4.$$

2. I punti fissi e le loro proprietà

Prima di studiare l'equazione logistica, rivediamo i risultati a cui siamo giunti nello studio del sistema dinamico lineare

$$a_{n+1} = f(a_n), \text{ con } f(x) = mx + q, \quad (**)$$

Abbiamo visto che un punto fisso del sistema è soluzione dell'equazione

$$f(x) = x;$$

se $m \neq 1$, questa equazione di primo grado ha una e una sola soluzione, che è $\lambda = \frac{q}{1-m}$. Se assumiamo λ come valore iniziale della successione, la successione è costante e assume sempre il valore λ .

Per altri valori iniziali, abbiamo un comportamento molto semplice da descrivere:

- se $|m| < 1$, i valori della successione “vengono attratti da λ ”, nel senso che si avvicinano sempre più ad esso (più precisamente, si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$); in questo caso il punto fisso è detto **attrattivo**; siccome questo avviene qualunque sia il valore iniziale, diciamo che il **bacino di attrazione** di λ è l'intero asse reale;
- se $|m| > 1$, i valori della successione vengono “respinti” da λ ; nel senso che, partendo anche da un punto vicino a λ (ma diverso da λ), essi tendono ad allontanarsi (più precisamente, si ha che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \infty$); in questo caso il punto è chiamato **repulsivo**.

Quando consideriamo un sistema dinamico non lineare si presentano fenomeni nuovi; per studiarli dobbiamo introdurre definizioni più precise e risultati di tipo generale.

Innanzitutto una importante osservazione; nella teoria dei sistemi dinamici si considera la composizione iterata di una funzione con se stessa; la convenzione adottata è di indicare $f(f(x))$ con la notazione $f^2(x)$. In generale, $f^n(x)$ indica la composizione di f con se stessa n volte e **non** la potenza n -sima di f .

Per i sistemi lineari abbiamo introdotto il grafico a ragnatela, che sarà lo strumento di base anche per lo studio dei sistemi non lineari. Le ascisse dei punti che visualizziamo nella ragnatela costituiscono la traiettoria del sistema.

Definizione

Dato il sistema dinamico $a_{n+1} = f(a_n)$, si definisce **traiettoria** del sistema l'insieme

$$O(a_0) = \{a_0, f(a_0), f^2(a_0), \dots, f^n(a_0), \dots\}.$$

Ora precisiamo le nozioni di punto attrattivo, punto repulsivo, bacino di attrazione, che avevamo visto nel caso lineare solo da un punto di vista intuitivo.

Definizione

Un punto fisso λ di un sistema dinamico si dice **stabile** o attrattivo se

$$\forall m > 0 \exists d > 0: \forall a_0, \forall n \geq 1 \quad |a_0 - \lambda| < d \Rightarrow |a_n - \lambda| < m.$$

A parole: comunque fissiamo un intorno U di λ , esiste un altro intorno V di λ con questa proprietà: comunque scegliamo a_0 in V , la traiettoria di a_0 ricade in U .

La negazione logica della condizione della definizione precedente porta alla definizione di punto instabile.

Definizione

Un punto fisso λ di un sistema dinamico si dice **instabile** o repulsivo se

$$\exists m > 0 \forall d > 0: \exists a_0, \exists n \geq 1 \quad |a_0 - \lambda| < d \text{ e } |a_n - \lambda| \geq m.$$

A parole: esiste un intorno U di λ , tale che, comunque fissiamo un secondo intorno V , possiamo trovare un a_0 in V , tale che l'orbita di a_0 abbia un elemento non appartenente a U ; in termini meno precisi, esiste un a_0 la cui traiettoria non è “confinata” in U .

Un punto fisso stabile può avere due comportamenti, che possiamo rilevare anche nel caso lineare.

Consideriamo il sistema (**) con $q = 0$ e $m = 1$. L'origine è un punto fisso ed è stabile; comunque fissiamo un intorno U dell'origine esiste un intorno a partire dal quale le traiettorie restano confinate in U : si tratta di U stesso (o di qualunque intorno contenuto in U).

Se invece consideriamo (**) con $q = 0$ e $m = 1/2$, vediamo subito che l'origine è un punto fisso stabile; in questo caso però le traiettorie non solo “restano in un intorno che abbiamo prefissato”, ma sono anche convergenti all'origine.

Per distinguere questi comportamenti, introduciamo la definizione seguente.

Definizione

Un punto fisso λ è **asintoticamente stabile** se è stabile ed esiste un intorno U di λ tale che se $a_0 \in U$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$.

L'insieme dei punti che vengo attratti da un punto fisso asintoticamente stabile è il suo bacino di attrazione.

Definizione

Il **bacino di attrazione** di un punto fisso λ è l'insieme degli $a_0 \in R$ tali che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$.

Un problema di fondamentale importanza nella teoria dei sistemi dinamici è quello di stabilire la natura dei punti fissi.

Una soluzione a questo problema è data dal teorema seguente, che è molto semplice e “non inaspettato”, se riflettiamo su questo fatto. Nel caso lineare la stabilità o meno del punto fisso dipende dal coefficiente angolare della retta $y = mx + q$, che è la derivata della funzione $f(x) = mx + q$.

Siccome una funzione derivabile in un punto può essere approssimata, in un intorno del punto, dalla retta tangente al suo grafico, ci aspettiamo che, nel caso generale di un sistema non lineare, la derivata nel punto fisso giochi un ruolo essenziale.

In effetti è così; enunciamo il teorema seguente nell'ipotesi che la funzione sia derivabile con derivata continua (si possono considerare condizioni meno restrittive, che non esaminiamo qui).

Teorema (*)**

Sia λ un punto fisso del sistema dinamico discreto

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad a_0 \text{ assegnato in } \mathbb{R},$$

dove f è una funzione derivabile con derivata continua.

Se $|f'(\lambda)| < 1$, allora λ è asintoticamente stabile; se invece $|f'(\lambda)| > 1$, allora λ è instabile.

In questo enunciato non si dice niente quando risulta $|f'(\lambda)| = 1$; ci sono altri risultati che permettono lo studio di questa situazione, il lettore interessato può trovarli nei libri citati nella bibliografia.

3. I punti fissi della successione logistica

Quanto visto nel paragrafo precedente ci permette di iniziare lo studio della successione logistica.

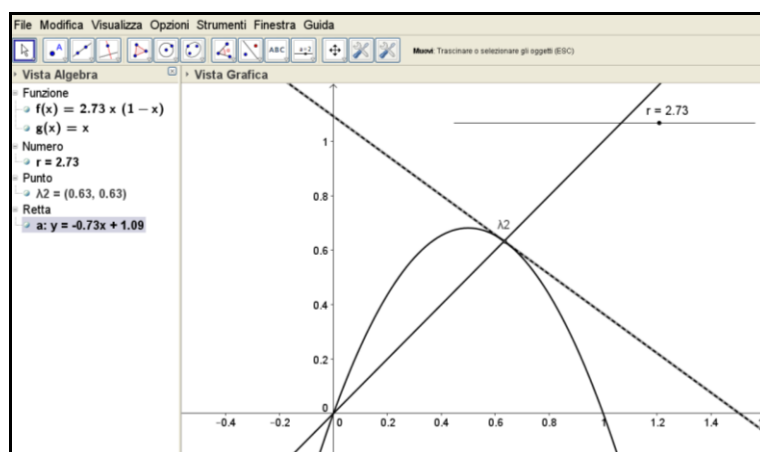
Iniziamo determinando i punti fissi; risolviamo l'equazione

$$f(x) = x \Rightarrow rx(1-x) = x \Rightarrow (r-1)x = rx^2,$$

che ha la soluzione $\lambda_1 = 0$ e, ricordando che r non è nullo, la soluzione $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{r}$; questa soluzione, per $0 < r \leq 4$, varia in $(-\infty, 3/4]$.

Per studiarne la stabilità, possiamo utilizzare Geogebra per avere una visione geometrica immediata del problema.

Introduciamo lo slider r (con r che varia da 0 a 4) e tracciamo il grafico della funzione $f(x) = rx(1-x)$ e della funzione identica. Nel punto λ_2 di intersezione tracciamo la tangente al grafico di f ; nella finestra Algebra possiamo vedere l'equazione di questa retta e controllare la sua pendenza.

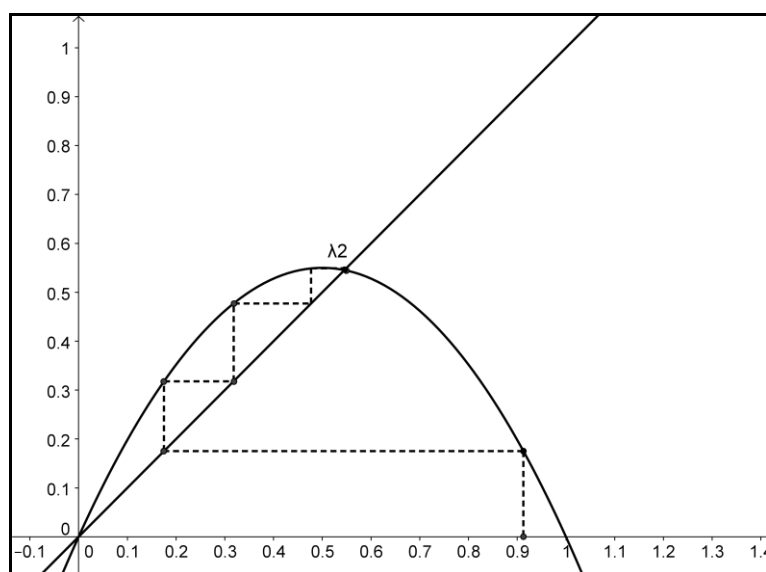


Lo studio analitico della stabilità è molto semplice: calcoliamo la derivata della funzione f , che è $f'(x) = r(1-2x)$, e la valutiamo nei punti fissi, ottenendo

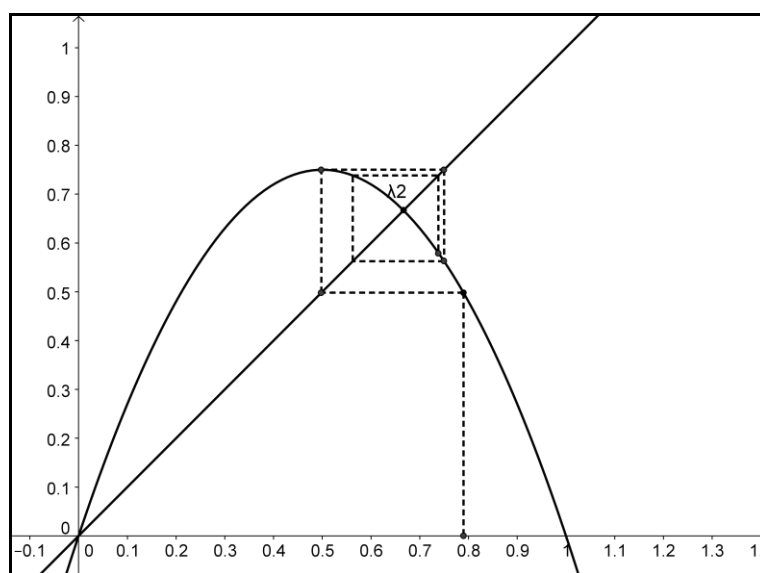
$$f'(0) = r, \quad f'(\lambda_2) = 2 - r.$$

Abbiamo quindi che:

1. se $0 < r < 1$, l'origine è un punto fisso attrattivo per tutto l'intervallo $[0, 1]$; il punto fisso λ_2 è negativo e quindi non ci interessa in questa sede;
2. se $r = 1$, abbiamo un unico punto fisso: l'origine. Il teorema (***) non ci aiuta (essendo la derivata uguale a uno). Da un esame diretto del sistema (fatto con la costruzione del grafico a ragnatela, come abbiamo visto per i sistemi lineari) osserviamo che l'origine è ancora un punto attrattivo e tutto l'intervallo $[0, 1]$ appartiene al suo bacino di attrazione;
3. se $1 < r < 3$ l'origine diventa repulsiva, mentre $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{r}$, che varia tra 0 e $2/3$ è attrattivo, in quanto $|f'(\lambda_2)| < 1$; come possiamo vedere dall'esame del grafico a ragnatela, il bacino di attrazione è dato dall'intervallo aperto $(0, 1)$. Un esempio (relativo a $r = 2,2$) è mostrato nella figura.



4. se $r = 3$ il punto fisso $\lambda_2 = 2/3$ è ancora attrattivo; perveniamo a questo risultato con una analisi diretta delle traiettorie, in quanto $|f'(\lambda_2)| = 1$ e non possiamo utilizzare il teorema (***)
Ci accorgiamo del fatto la convergenza diventa molto lenta e sono necessarie molte iterazioni per capire che il punto fisso è attrattivo.



4. La nascita dei cicli

Quando il parametro r supera il valore 3, il punto fisso λ_2 diventa instabile, in quanto $f'(\lambda_2) < -1$.

Si manifesta un fenomeno molto interessante: la nascita dei cicli. Per osservare la presenza di un ciclo, possiamo procedere “sperimentalmente” fissando un valore di r .

Scegliamo $r = 3,2$; il punto fisso è $\lambda_2 = 0,6875$.

Costruiamo una tabella Excel; nella prima riga mettiamo alcuni valori iniziali e in ogni colonna visualizziamo i primi 30 punti dell'orbita, come si vede nella tabella riportata di seguito.

Studio della successione logistica per $r=3,2$					
a_0	0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000
a_1	0,2880	0,5120	0,6720	0,7680	0,8000
a_2	0,6562	0,7995	0,7053	0,5702	0,5120
a_3	0,7219	0,5129	0,6651	0,7842	0,7995
a_4	0,6424	0,7995	0,7128	0,5415	0,5129
a_5	0,7351	0,5130	0,6551	0,7945	0,7995
a_6	0,6231	0,7995	0,7230	0,5225	0,5130
a_7	0,7515	0,5130	0,6408	0,7984	0,7995
a_8	0,5975	0,7995	0,7365	0,5151	0,5130
a_9	0,7696	0,5130	0,6210	0,7993	0,7995
a_10	0,5675	0,7995	0,7532	0,5134	0,5130
a_11	0,7854	0,5130	0,5949	0,7994	0,7995
a_12	0,5393	0,7995	0,7712	0,5131	0,5130
a_13	0,7951	0,5130	0,5647	0,7995	0,7995
a_14	0,5214	0,7995	0,7866	0,5131	0,5130
a_15	0,7985	0,5130	0,5371	0,7995	0,7995
a_16	0,5148	0,7995	0,7956	0,5130	0,5130
a_17	0,7993	0,5130	0,5204	0,7995	0,7995
a_18	0,5133	0,7995	0,7987	0,5130	0,5130
a_19	0,7994	0,5130	0,5146	0,7995	0,7995
a_20	0,5131	0,7995	0,7993	0,5130	0,5130
a_21	0,7995	0,5130	0,5133	0,7995	0,7995
a_22	0,5131	0,7995	0,7994	0,5130	0,5130
a_23	0,7995	0,5130	0,5131	0,7995	0,7995
a_24	0,5130	0,7995	0,7995	0,5130	0,5130
a_25	0,7995	0,5130	0,5131	0,7995	0,7995
a_26	0,5130	0,7995	0,7995	0,5130	0,5130
a_27	0,7995	0,5130	0,5130	0,7995	0,7995
a_28	0,5130	0,7995	0,7995	0,5130	0,5130
a_29	0,7995	0,5130	0,5130	0,7995	0,7995
a_30	0,5130	0,7995	0,7995	0,5130	0,5130

Si verifica facilmente che, introducendo altri valori iniziali, si ottiene un risultato qualitativamente analogo.

Le orbite non convergono al punto fisso; questo è abbastanza naturale, perché abbiamo visto che si tratta di un punto non attrattivo. Il fenomeno interessante è che, dopo un certo numero di iterazioni, che varia in base al dato iniziale a_0 , sembra che la successione assuma alternativamente solo due valori: 0,7995 e 0,5130.

Non è però corretto affermare che la successione da un certo punto in poi “assume solo i due 0,7995 e 0,5130”; se ricostruiamo la tabella utilizzando 12 cifre decimali per la visualizzazione dei risultati, vediamo, ad esempio, che per $a_0 = 0,10$ i valori di $a_{28} = 0,513044541589$ e di $a_{30} = 0,513044514662$ sono diversi; basta comunque proseguire un po’ nei calcoli e trovare due valori (con indici pari successivi) uguali con questa approssimazione e due valori (con indici dispari successivi) uguali.

Insomma, è evidente che la successione non “assume solo due valori” da un certo punto in poi, ma “tende a una successione che assume solo due valori”.

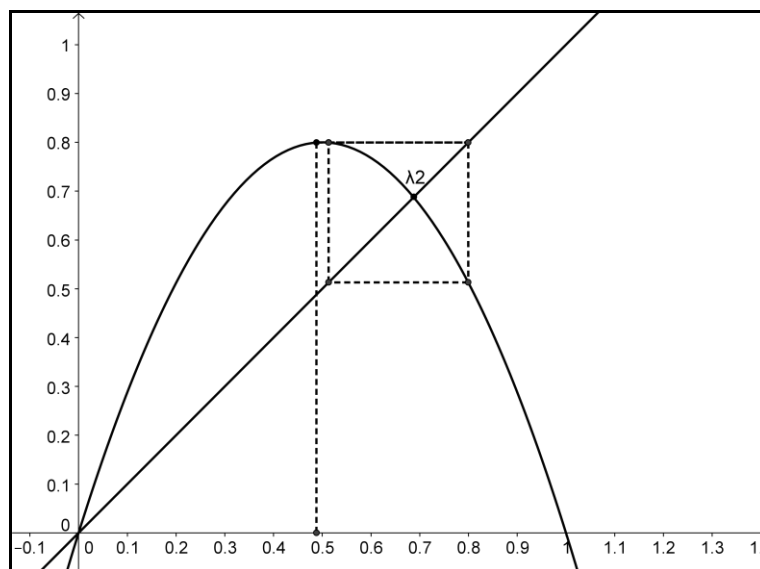
Possiamo verificare lo stesso fenomeno se procediamo per via grafica, come si vede nella figura della pagina seguente

Che cosa è successo? Il sistema, per questi valori del parametro presenta un ciclo di periodo due stabile e tutte le traiettorie tendono a questo ciclo. Definiamo il concetto di ciclo e di periodo di un ciclo.

Definizione

Dato il sistema dinamico $a_{n+1} = f(a_n)$, una sua traiettoria $O(a_0)$ si dice periodica di periodo p se risulta che

$$\begin{cases} a_p = f^p(a_0) = a_0 \\ a_i = f^i(a_0) \neq a_0, \quad \forall i: 1 \leq i \leq p-1 \end{cases}.$$



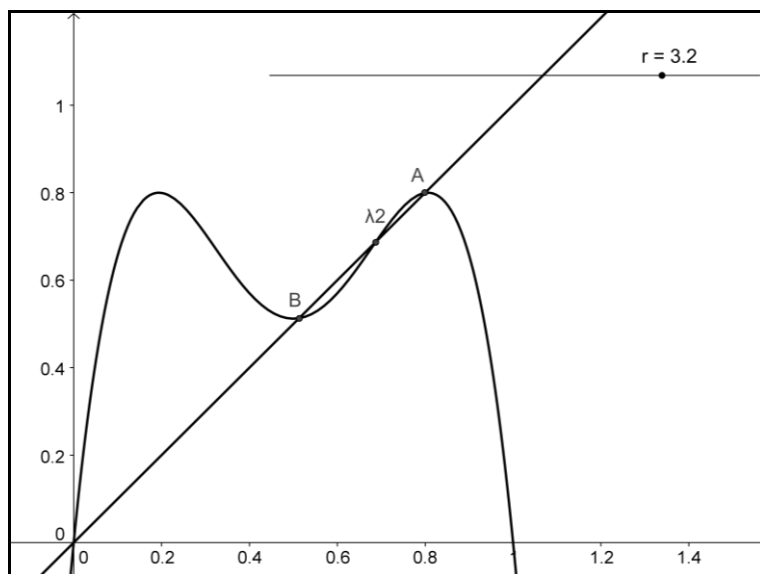
Abbiamo visto che un punto fisso del sistema dinamico è una soluzione dell'equazione $f(x) = x$; possiamo dire qualcosa di analogo per i punti di un ciclo?

Se consideriamo per semplicità un ciclo di periodo due; vediamo immediatamente che ognuno dei due punti del ciclo non è un punto fisso di f , ma è invece un punto fisso per la funzione $f^2(x) = f(f(x))$.

Per studiare la presenza di cicli dobbiamo quindi studiare l'equazione $f^2(x) = x$, che, nel caso dell'equazione logistica, è una equazione di quarto grado.

Lo studio grafico (figura seguente) ci mostra l'esistenza di quattro punti di intersezione tra il grafico di $f^2(x)$ e la bisettrice: due sono ovvii (l'origine e λ_2), se riflettiamo sul fatto che i punti fissi di $f(x)$ sono anche punti fissi di $f^2(x)$. Ci sono altri due punti,

che sono chiamati *A* e *B* nella figura e le cui ascisse corrispondono approssimativamente ai valori 0,7995 e 0,5130 trovati con Excel.



Per determinarli esattamente possiamo risolvere l'equazione dopo averla ridotta di grado, visto che conosciamo due delle sue soluzioni, oppure possiamo fare ricorso a un programma di calcolo simbolico; in ogni caso otteniamo

$$\lambda_3 = \frac{21 - \sqrt{21}}{32}, \quad \lambda_4 = \frac{21 + \sqrt{21}}{32},$$

i cui valori approssimati sono, rispettivamente, 0,5130445095 e 0,7994554904, in accordo con quanto abbiamo già trovato.

Il ciclo di periodo due che abbiamo trovato è stabile; tutte le traiettorie convergono a questo ciclo, come abbiamo intuito dalla nostra sperimentazione numerica e grafica.

Abbiamo considerato un caso particolare; che cosa possiamo dire in generale?

Ci viene in aiuto un altro teorema, a cui accenniamo solamente: per determinare la stabilità di un ciclo si calcola la derivata della funzione iterata ($f^2(x)$ per i cicli di periodo due) nei punti fissi che formano il ciclo. Se il modulo della derivata è minore di uno in tutti questi punti, allora il ciclo è stabile, se il modulo della derivata in almeno uno dei punti è maggiore di uno, allora il ciclo è instabile.

Nello studio dei cicli di periodo due possiamo svolgere i calcoli; essendo

$$f^2(x) = r^2 x(1-x)(1-rx+rx^2)$$

la derivata è

$$\frac{d}{dx} f^2(x) = r^2(1-2x)(1-2rx+2rx^2)$$

Valutiamo questa derivata, ad esempio, nel punto λ_3 e imponiamo che sia in modulo minore di uno

$$\left| \frac{d}{dx} f^2(\lambda_3) \right| = |2(r+2) - r^2| < 1$$

Questa disuguaglianza è soddisfatta nell'intervallo $(3, 1+\sqrt{6})$. Abbiamo quindi un nuovo “valore di svolta” che è approssimativamente uguale a 3,4495.

Per $r = 1 + \sqrt{6}$ il ciclo di periodo due passa da stabile a instabile; il “valore di svolta” deve essere esaminato direttamente e risulta essere stabile con convergenza molto lenta.

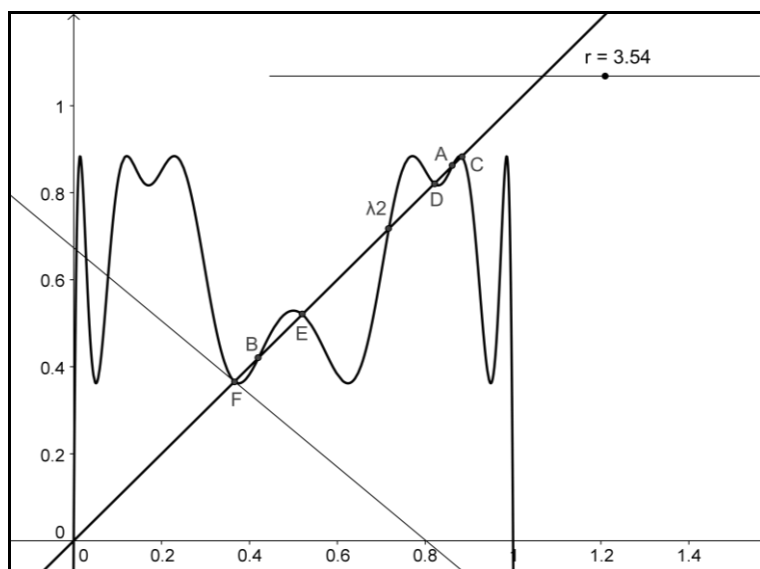
Se $r > 1 + \sqrt{6}$ si osserva la nascita di un ciclo di periodo 4.

La funzione $f^4(x)$ è una funzione polinomiale di grado sedici; non possiamo più svolgere calcoli espliciti, ma possiamo esaminare graficamente le intersezioni di $f^4(x)$ e vedere come si comporta la derivata nei punti di intersezione.

Nella figura vediamo che ci sono otto punti di intersezione:

- l'origine e λ_2 (punti fissi anche di $f(x)$);
- i punti A e B (punti fissi anche di $f^2(x)$);
- i punti C, D, E ed F (punti fissi solamente di $f^4(x)$).

Valutando la pendenza della tangente nei punti del ciclo, possiamo congetturare che ci sia stabilità fino a circa 3,543.



Quando r supera questo valore il ciclo di periodo 4 diventa instabile e compare un ciclo di periodo 8.

Gli intervalli in cui un ciclo è stabile diventano sempre più piccoli e le biforcazioni, ovvero i passaggi da un ciclo di periodo n a un ciclo di periodo doppio, diventano sempre più rapide; risulta sempre più difficile seguirle anche graficamente.

5. La transizione al caos

A questo punto possiamo fare delle congetture e soprattutto porci delle domande:

- Sembra nascere una sequenza di cicli che hanno come periodo una potenza crescente di due; queste biforcazioni proseguono all'infinito ?
- Esistono solo cicli di questo periodo 2^n o anche cicli, ad esempio, di periodo 6 oppure 22?
- Esistono anche cicli di periodo dispari?

Le prime due domande hanno risposta positiva; non abbiamo qui lo spazio per esaminarle in dettaglio.

Soffermiamoci invece sulla terza domanda. Possiamo provare a rispondere utilizzando il metodo “sperimentale” adottato finora.

Cerchiamo gli eventuali cicli di periodo 3, studiando l'intersezione di $f^3(x)$ con la bisettrice del primo quadrante. Vediamo che per r approssimativamente uguale a 3,83 si ha un ciclo di periodo 3, che è stabile per un piccolo intervallo del parametro e poi diventa anch'esso instabile.

Questo ciclo è particolarmente importante, anzi possiamo dire che è il più importante di tutti, in quanto la sua esistenza permette di stabilire molte proprietà del sistema dinamico.

Infatti esiste un fondamentale teorema sui sistemi dinamici dimostrato nel 1964 dal matematico ucraino Sharkovskij; un risultato molto simile è stato trovato (senza essere a conoscenza del lavoro di Sharkovskij) nel 1975 dai matematici americani Li and Yorke.

Il titolo del loro lavoro “Period Three Implies Chaos” è molto esplicativo: introduce per la prima volta il termine “caos” nella teoria dei sistemi dinamici e sottolinea il fatto che la presenza di un ciclo di periodo tre è il “segnale” che ci avverte della transizione da un sistema ordinato a uno caotico.

Enunciamo e commentiamo brevemente il teorema di Sharkovskij.

Teorema (Sharkovskij 1964)

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I , dipendente da un parametro reale r . Se esiste un valore del parametro r tale per cui f ha un ciclo di periodo p , allora f ha anche un ciclo di periodo m , con m che segue p nell'ordinamento seguente:

3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - ...

6 - 10 - 14 - 22 - 26 - 30 - ...

12 - 20 - 28 - 36 - 44 - 52 - 60 - ...

...

64 - 32 - 16 - 8 - 4 - 2.

Osserviamo innanzitutto che nell'ordinamento di Sharkovskij sono compresi tutti i numeri naturali, ordinati però in un modo diverso da quello abituale. Infatti troviamo:

1. prima tutti i numeri dispari in ordine crescente;
2. poi i numeri della forma $2d$, dove d è un numero dispari, in ordine crescente;
3. poi i numeri della forma 2^2d , con d dispari, in ordine crescente;
4. ... quelli della forma 2^nd , con d dispari, in ordine crescente;
5. ...
6. e infine le potenze di 2 in ordine decrescente.

Ci sono molte considerazioni da fare su questo risultato. Eccone alcune:

1. Il “ciclo base” è quello di periodo 2; se non esistono cicli di periodo 2 non possono esistere cicli di periodo maggiore;
2. come abbiamo verificato con le nostre sperimentazioni numeriche, l'esistenza di un ciclo di periodo 4 implica quella di un ciclo di periodo 2; l'esistenza di un ciclo di periodo 8 quella di periodo 4 e 2, e così via;

3. l'esistenza di un ciclo di periodo 3 implica l'esistenza di cicli di ogni periodo;
4. se esiste un ciclo di periodo dispari, allora esistono tutti i cicli di periodo pari;
5. il teorema non fornisce informazioni sulla stabilità dei cicli; ad esempio, per $3,83 < r < 3,85$, il teorema afferma che, esistendo un ciclo di periodo tre, esistono cicli di ogni periodo. Tuttavia se proviamo a studiare i cicli in questo intervallo del parametro, troviamo solo quello di periodo 3. Questo è dovuto al fatto che il ciclo di periodo 3 è stabile, mentre tutti gli altri sono instabili e quindi sfuggono alle nostre sperimentazioni numeriche.

Ma che cosa succede quando $r > 3,85$ circa? Anche il ciclo di periodo 3 diventa instabile; come si comporta allora il sistema?

Questa è la situazione che viene definita “transizione al caos”, che vede la nascita di traiettorie aperiodiche.

Il caso $r = 4$ è stato ampiamente studiato e il suo comportamento è stato definito “caotico”. Non c'è una totale concordanza tra i matematici su che cosa si debba intendere con “caos”.

Una delle definizioni che sono state proposte (vedi il testo di Holmgren citato nella bibliografia) afferma che possiamo parlare di caos quando:

- le traiettorie dipendono fortemente dal valore iniziale, nel senso che piccoli cambiamenti di a_0 generano traiettorie che possono discostarsi di molto;
- il sistema “mescola bene i punti dell'intervallo I ”; in termini più precisi, comunque fissiamo un intorno U in I , per ogni intorno V esiste un a_0 la cui traiettoria $O(a_0)$ ha un punto che appartiene a U ;
- il comportamento regolare non scompare del tutto, in quanto in ogni intorno U incluso nell'intervallo I esiste un a_0 la cui traiettoria $O(a_0)$ è periodica.

6. Possiamo “vedere il caos”?

La visualizzazione della situazione caotica è difficile; a causa della instabilità delle traiettorie e degli errori numerici non possiamo seguire una traiettoria, poiché un errore numerico, anche piccolo, ci sposta da una traiettoria all'altra.

Possiamo comunque avere un'idea approssimativa, ma abbastanza suggestiva, della situazione caotica, realizzando questo esperimento numerico con un foglio elettronico; utilizziamo Geogebra per la ottima integrazione tra grafica e foglio di calcolo.

Nell'ambiente Foglio di calcolo inseriamo nella cella A1 il parametro r e nella cella B1 un valore iniziale a_0 della successione logistica, compreso tra 0 e 1.

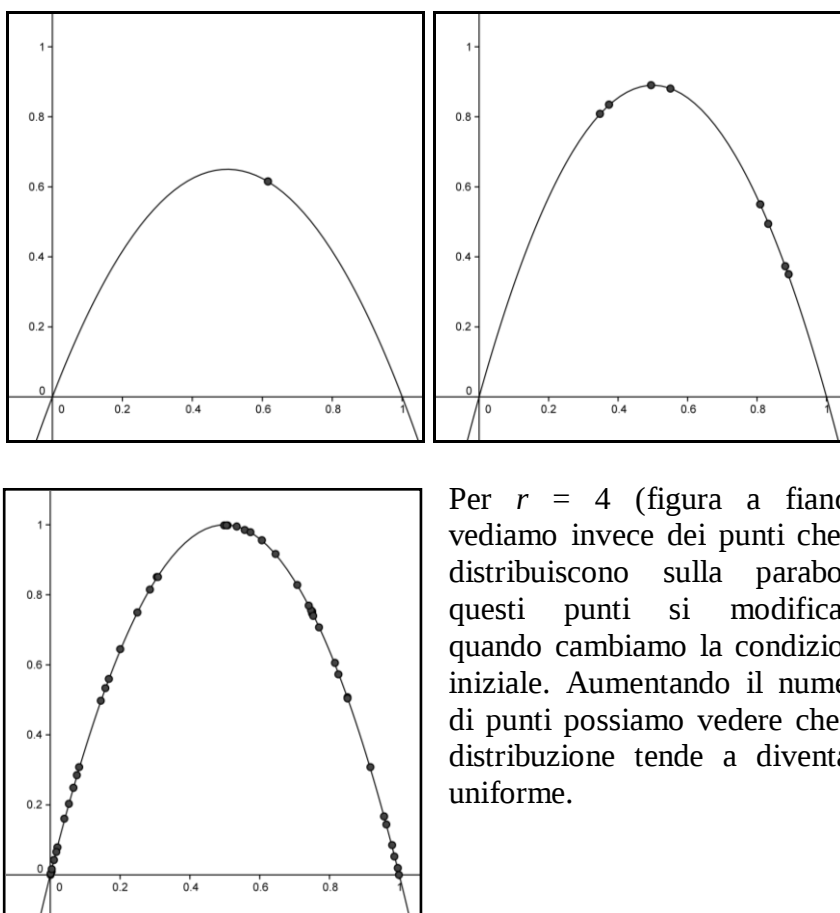
Nella cella A2 scriviamo “=B1” e nella cella B2 scriviamo “=A\$1*A2*(1-A2)”. Copiamo l'area A2:B2 in A3:B100. In ogni riga del nostro foglio abbiamo una coppia (a_n, a_{n+1}) , che è un punto della parabola $y = rx(1-x)$.

Siccome ci interessa il comportamento per n grandi consideriamo solamente gli ultimi 50 termini (o gli ultimi 10 o 20, se il nostro computer non è sufficientemente potente); evidenziamo l'area A51:B100 e selezioniamo con il tasto destro dapprima Crea e poi Lista di punti. Nella finestra grafica appaiono i punti considerati (nelle figure che seguono, è stata aggiunta anche la parabola).

Se scegliamo $r = 2,6$ vediamo... un punto solo; cambiando il dato iniziale, continuiamo a vedere un solo punto.

Perché questo? Se $r = 2,6$ il sistema dinamico ha un punto fisso stabile; per $n > 50$ l'orbita è molto vicina al punto fisso, tanto che ci sembra di vedere 50 punti sovrapposti (figura seguente a sinistra).

Se poi scegliamo, ad esempio, $r = 3,48$, vediamo i 4 punti del ciclo stabile di periodo 4; per $r = 3,56$ abbiamo un ciclo stabile di periodo 8 (figura seguente a destra), anch'esso indipendente dalla condizione iniziale.



Per $r = 4$ (figura a fianco) vediamo invece dei punti che si distribuiscono sulla parabola; questi punti si modificano quando cambiamo la condizione iniziale. Aumentando il numero di punti possiamo vedere che la distribuzione tende a diventare uniforme.

Questo esperimento può aiutare a visualizzare l'idea che, come si è detto, il sistema caotico “mescola bene i punti dell'intervallo I ”.

Bibliografia

L'articolo che costituisce un prerequisito per la lettura di questo è:
P. Boieri, *Successioni numeriche: teoria, esempi, applicazioni*,
L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 35 A-B, 639-656.

Alcuni argomenti trattati in questo articolo sono stati per alcuni anni parte di un corso istituzionale di Analisi:
Geymonat Giuseppe, *Lezioni di Matematica Volume 1*, Levrotto e Bella, Torino, 1981

Un testo in italiano dedicato interamente alle successioni per ricorrenza e alle loro applicazioni è:
Salinelli Ernesto e Tomarelli Franco, *Modelli dinamici discreti*, Springer Verlag, 2008

Tra i numerosi testi in lingua inglese trattano i sistemi dinamici discreti; ricordiamo in particolare
Holmgren R.A., *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Second Edition, Springer, 1996,
che richiede una conoscenza da biennio universitario di Analisi e presenta nei primi capitoli gli altri prerequisiti necessari

L'articolo di Li e Yorke è:
T.Y. Li, and J.A. Yorke, *Period Three Implies Chaos*, American Mathematical Monthly 82, 985 (1975).

Tra i numerosi testi divulgativi che trattano le problematiche del caos, ricordiamo:
Gleick J., *Caos. La nascita di una nuova scienza*, Rizzoli, 2000
Stewart I., *Dio gioca a dadi? La nuova matematica del caos*, Bollati Boringhieri, 2010