



Righetto Stefano

**I Numeri nella Quotidianità:
La Serie di Fibonacci e
la Sezione Aurea**

Indice

- Leonardo Pisano, “Il Fobonacci”
- Il *Liber Abaci*
- Il Problema dei Conigli
- La Serie di Fibbonacci
- Che cos'è una Successione?
- Rappresentazioni della Sequenza di Fibonacci
- Una Stupefacente Gamma di Proprietà
- La Serie di Fibonacci e la Borsa di Milano
- Il Fibonacci Heap
- Rappresentazioni Artistiche della Successione
- La Proprietà Più Importante
- La Sezione Aurea
- La Sezione Aurea e L'arte
- L'Uomo Perfetto
- La Spirale Aurea
- La spirale Cosmica

Leonardo Pisano, “Il Fibonacci”

Leonardo Pisano, figlio di Guglielmo dei Bonacci (Fibonacci sta infatti per *filius Bocacci*) nacque a Pisa alla fine del XII secolo. Le poche notizie sulla sua vita si hanno da qualche cenno autobiografico presente nelle sue opere.

Assimilò per molti anni, girando per il mediterraneo assieme al padre mercante, le conoscenze matematiche del mondo arabo che, per primo, portò in Europa attraverso i suoi scritti a partire dal 1202, anno di pubblicazione del *Liber Abaci*, sua opera più celebre



Il *Liber Abaci*

« Ci sono nove figure degli indiani: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con queste nove figure, e con il simbolo 0, che gli arabi chiamano *zephiro*, qualsiasi numero può essere scritto, come dimostreremo. », così inizia il primo capitolo dell'opera più celebre di Leonardo, a cui si attribuisce il merito di aver portato e diffuso il sistema di calcolo arabo decimale, ancora in uso al giorno d'oggi in gran parte del mondo, in Europa.

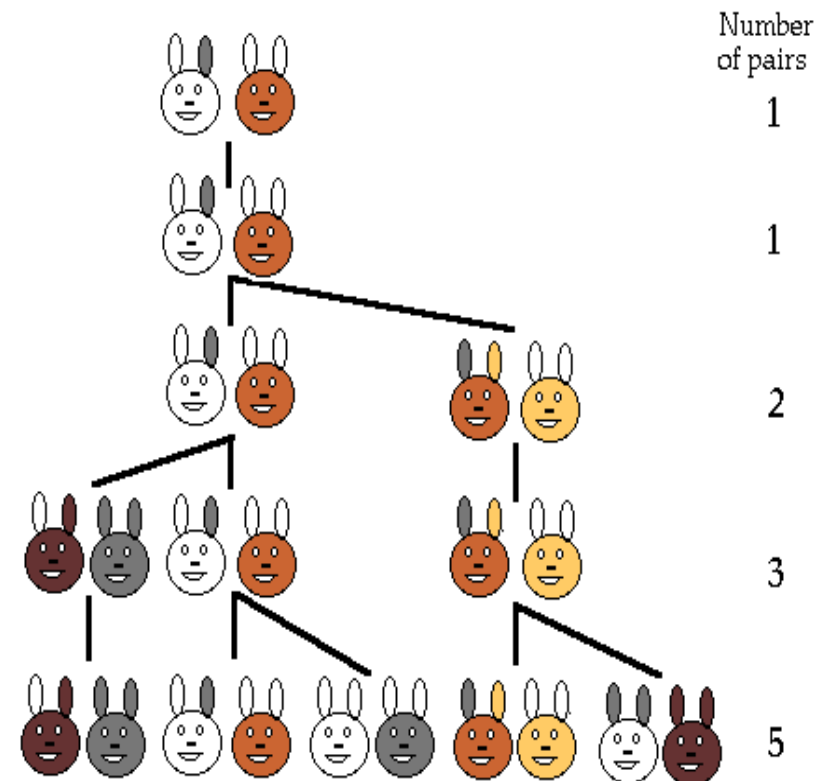
Tale *liber* si articola in 15 capitoli, che si possono raggruppare in 4 parti principali: la prima (cap. 1 – 7) è un'introduzione all'algebra ed ai nuovi numeri; la seconda (cap. 8 – 12) presenta alcuni esempi pratici tratti dalla marcatura o problemi di matematica divertenti con lo scopo di dimostrare la superiorità del sistema di calcolo posizionale arabo rispetto a quello additivo romano; la terza parte (cap. 13) tratta il metodo della doppia falsa posizione, ragionamento molto usato nella matematica araba e medioevale; l'ultima parte (cap. 14 – 15) tratta questioni più astratte come il calcolo di radici, ed il rapporto tra geometria ed algebra.

All'interno del dodicesimo capitolo Leonardo presenta anche il problema dei conigli, problema che gli ha reso la fama con cui è conosciuto ai posteri.

Il Problema dei Conigli

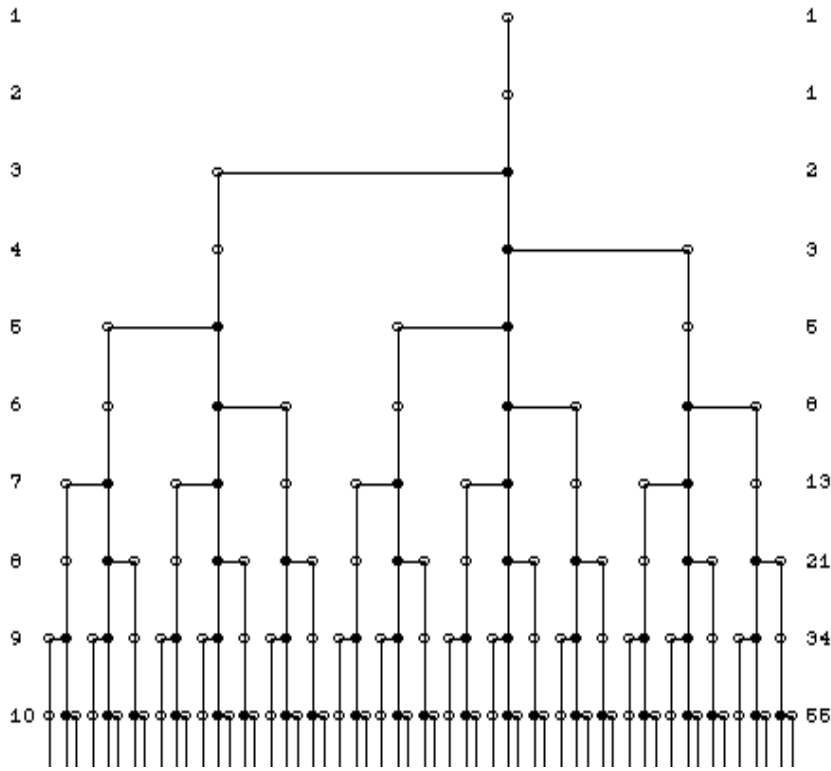
«Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita.»¹

Preso semplicemente come esempio della praticità del sistema numerico decimale, la sua soluzione diede vita ad una serie (detta appunto serie di Fibonacci) destinata ad essere studiata per secoli dai matematici di tutto il mondo per la sua stupefacente ricchezza di proprietà e manifestazioni in natura.



La Serie di Fibonacci

Family Tree of Rabbits



Fibonacci riuscì a risolvere questo problema attraverso una successione numerica, che prevedeva che ogni suo termine, cioè il numero di coppie di conigli in un certo mese, fosse la somma dei due precedenti:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

Leonardo, però, non riuscì a comprendere la grandezza della sua scoperta, e nessuno studio serio fu fatto fino agli inizi del XIX secolo, quando gli articoli sulla sequenza cominciarono a moltiplicarsi quasi con la stessa velocità dei conigli di Fibonacci.

Che cos'è una Successione?

In matematica, una Successione è un elenco ordinato di un numero infinito di oggetti, detti termini della successione, tra i quali è possibile distinguere un primo, un secondo, un terzo e in generale un ennesimo termine per ogni n naturale.

Formalmente, una Successione viene definita come una funzione che associa a un numero Naturale n un numero Reale a_n .

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad a_n = f(n)$$

Rappresentando la Successione sul Piano Cartesiano, non si ottiene una curva ma un insieme discreto di punti.

Come Rappresentare la Successione

Come ogni successione la serie di Fibonacci può essere rappresentata per elencazione:

$$F_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots\}$$

In questo modo però risulta impossibile riuscire a ricavare un numero qualsiasi della successione quando n assume valori elevati, quindi viene utilizzata anche la definizione analitica, cioè la funzione che rappresenta la nostra serie.

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Un altro modo più semplice per compiere tale operazione, senza dover ricorrere alla funzione è quello di elevare il numero di Fidìa Φ alla potenza n e dividere per $\sqrt{5}$ e arrotondare poi il risultato al numero intero più vicino.

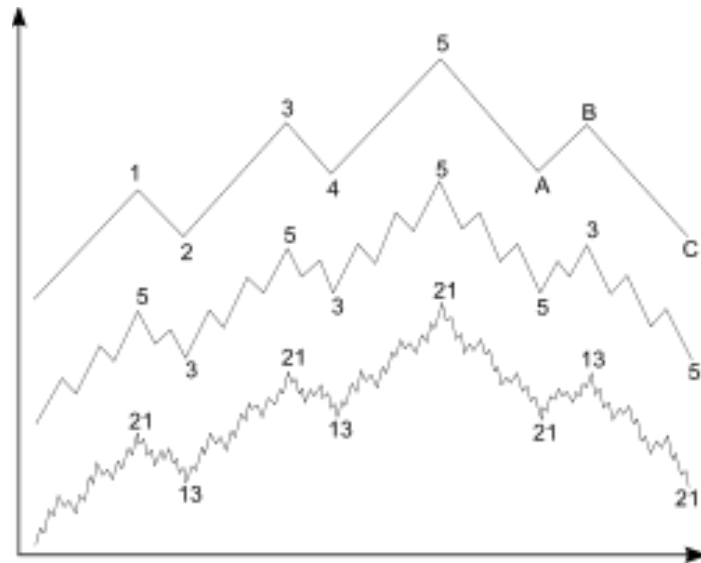
Una stupefacente Gamma di Proprietà

La sequenza di Fibonacci gode di una gamma di proprietà unica ed è ciò a renderla così studiata e popolare tra i matematici di tutto il mondo come ad esempio:

- Qualsiasi coppia di numeri di Fibonacci consecutivi sono primi tra loro.
- Il quadrato di un qualsiasi numero di Fibonacci differisce di 1 dal prodotto del numero che lo precede con quello che lo segue.
- Per 4 numeri di Fibonacci consecutivi qualsiasi A, B, C, D è valida la formula $C^2 - B^2 = A \times D$
- la somma dei quadrati dei numeri della successione, fino ad un punto qualsiasi, è uguale all'ultimo numero considerato moltiplicato per il successivo

Fibonacci e la Borsa di Milano

Ralph Elson Elliot, presso la Borsa azionistica di Milano, elaborò a partire dal 1927 una precisa teoria di previsione dei mercati finanziari prendendo spunto dal lavoro di Leonardo Pisano e dai suoi numeri. Tale teoria, denominata appunto le onde di Elliot, prevede una struttura a frattale dello schema finanziario, composto da cicli di otto onde, le prime 5 ascendenti e le ultime tre discendenti.

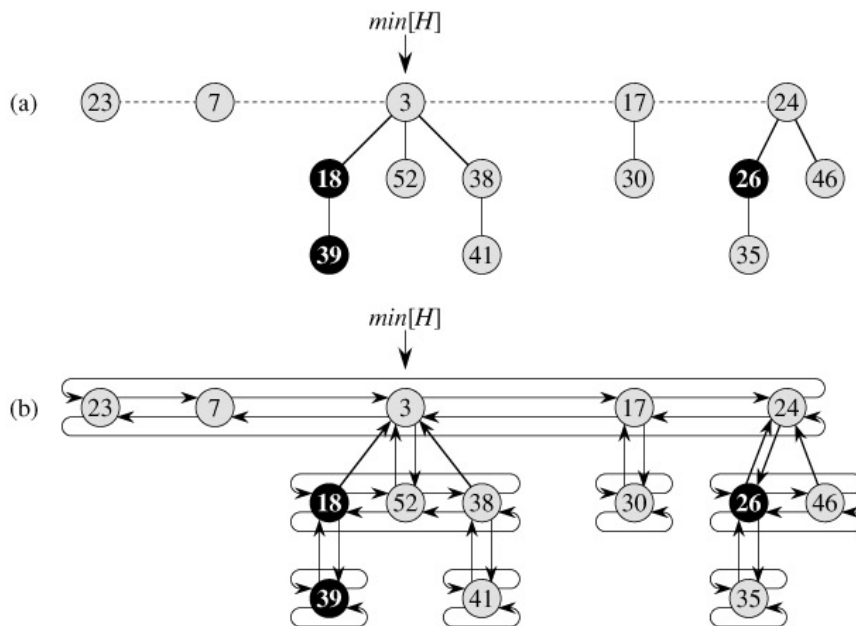


Attraverso tale sistema egli provò a spiegare la grande deflazione dell'economia mondiale del 1929 e altre crisi economiche ma non con i successi da lui sperati.

Ancora oggi il suo metodo, però è studiato e perfezionato, da molti economisti e matematici, con successo.

Il Fibonacci Heap

Il Fibonacci Heap è utilizzato nei processori Pentium, i più diffusi di tutto il mondo. In essi la corrente elettrica, che trasmette i dati attraverso il linguaggio macchina in codice binario, viene mossa all'interno dei circuiti attraverso sequenze di Fibonacci, grazie alle quali i dati vengono organizzati in modo più veloce, rendendo quindi possibile la risoluzione di complicati algoritmi.



La Serie di Fibonacci nella Natura

La serie di Fibonacci è onnipresente nel mondo che ci circonda e nella natura:

- I petali dei fiori sono in numeri appartenenti alla successione: i gigli ne hanno tre, i ranuncoli cinque, la calendula tredici, l'astro ventuno, e le margherite di solito ne hanno trentaquattro o cinquantacinque o ottantanove.
- Il numero delle spirali presenti nelle piante grasse, nei semi dei girasoli o delle baratee delle pigne e degli ananas sono sempre numeri di Fibonacci.
- La posizione delle foglie lungo i rami delle piante segue una disposizione simmetrica, ordinata secondo numeri di Fibonacci permette a tutte la massima esposizione ai raggi luminosi che gli consentono di compiere la fotosintesi clorofiliana.

Rappresentazioni Artistiche della Serie di Fibonacci

La successione di Fibonacci è considerata talmente importante per la matematica e in generale per la scienza da essere diventata oggetto di opere d'arte. In Italia, precisamente a Torino, all'angolo tra Via Montebello e Via Po, fino a poco tempo fa alzando lo sguardo verso la grande cupola della Mole Antonelliana, si poteva ammirare, ben fissata alle sue pareti dal progettista Mario Merz, una serie di grandi caratteri illuminati al neon, rappresentanti i primi numeri della Successione di Fibonacci.



La Proprietà più Importante

Sicuramente, però, la proprietà più importante è quella per cui il rapporto F_n / F_{n-1} , al tendere di n all'infinito, risulti uguale al numero irrazionale 1,61803...
ossia Φ , il numero di Fidìa,
chiave delle proporzioni perfette della sezione aurea.

$$\begin{array}{rcl} & \dots & \\ 55/34 & = & 1,617\,647 \\ 89/55 & = & 1,618\,182 \\ 144/89 & = & 1,617\,978 \\ 233/144 & = & 1,618\,056 \\ 377/233 & = & 1,618\,026 \\ 610/377 & = & 1,618\,037 \\ 987/610 & = & 1,618\,033 \end{array}$$

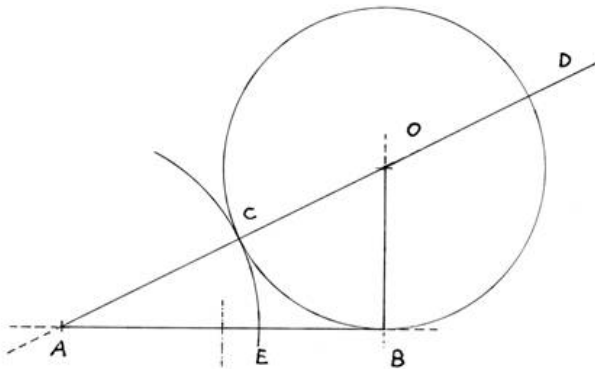
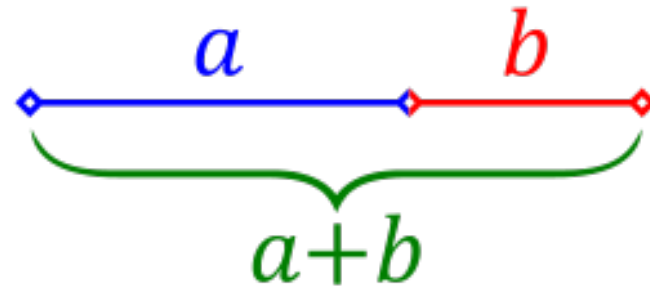
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots$$

La Sezione Aurea

Il numero di Fidia Φ rappresenta il valore fondamentale delle proporzioni perfette fin dall'età classica ed assume il valore del rapporto fra due lunghezze diseguali, delle quali il maggiore è medio proporzionale tra il minore e la somma delle due:

$$(a+b) : a = a : b = b : (a-b)$$

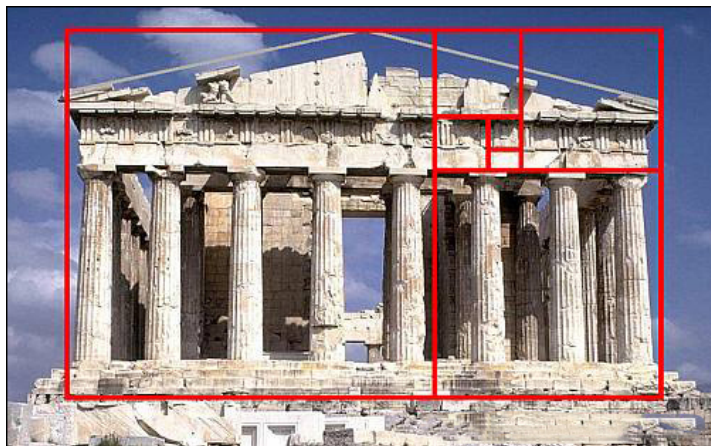
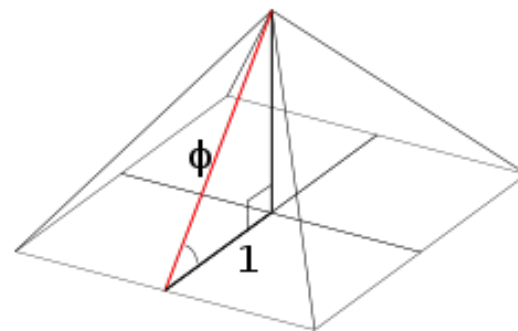


Oltre a ciò Φ ha molte proprietà matematiche piuttosto singolari:

- È l'unico numero il cui reciproco ed il cui quadrato mantengono la stessa parte decimale, infatti $\Phi=1,61803\dots$, $1/\Phi=0,61803\dots$ e $\Phi^2=2,61803\dots$.
- Invece, $(1/\Phi)^2$ è uguale a $0,38196\dots$, da cui si può notare che $1/\Phi+(1/\Phi)^2$ risulta $0,99999\dots$ ossia 1.

La Sezione Aurea nell'Arte

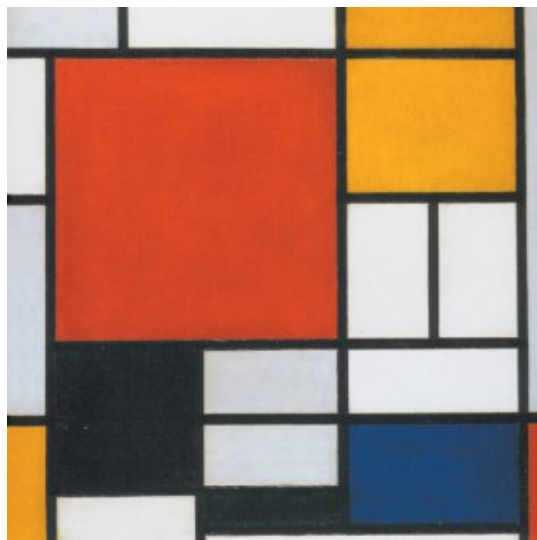
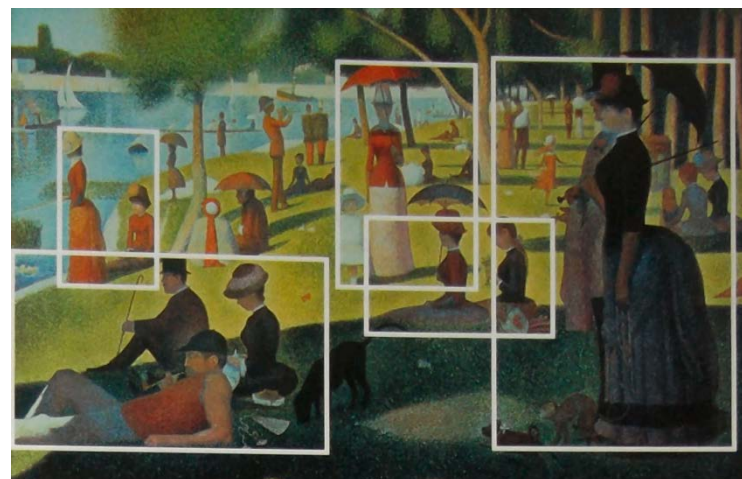
- Già a partire dagli egizi, fu usata un'approssimazione della sezione aurea, per regolare il rapporto tra l'altezza di una faccia laterale e il raggio della circonferenza inscritta nella base nella piramide di Cheope, nella piana di Giza. Tale rapporto assume infatti il valore di 1,6229, di poco differente da Φ .



- Con l'avvento dell'arte classica gli studi su Φ divennero la base delle proporzioni perfette nell'architettura e scultura greca e di conseguenza latina. Famoso esempio delle perfette proporzioni è il Partenone, che sorge sull'acropoli di Atene e presenta il rettangolo aureo in quasi ogni suo particolare.

La Sezione Aurea nell'Arte

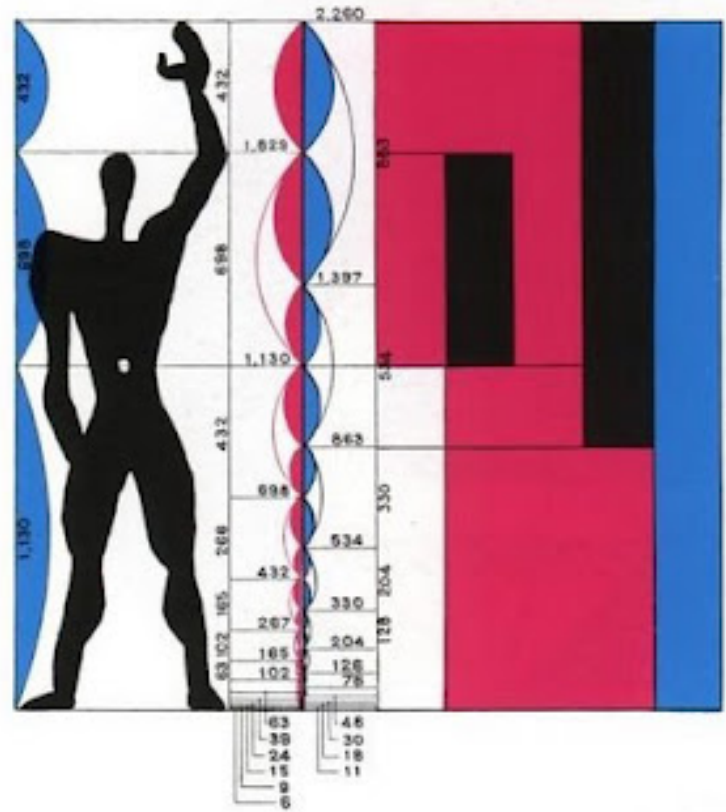
- Nonostante la caduta del mondo classico e con esso la sua arte, il numero di Fidia e la Sezione d'oro non furono abbandonati: molti tra gli autori di età più moderna, a partire già dal 1500, trovarono il rettangolo aureo come schema base per le loro opere, come ad esempio una domenica pomeriggio sull'isola della grande-jatte di Georges-Pierre Seurat.



- Piet Mondrian è l'artista che più rappresenta, nella sua opera, la divisione dello spazio in figure auree. In questo dipinto il quadrato al centro con i rettangoli bianchi e gialli è inscritto in un rettangolo aureo e il lato del quadrato è la sezione aurea del lato maggiore del rettangolo. Guardando l'opera nella sua globalità si scorgono molti altri esempi di questo genere.

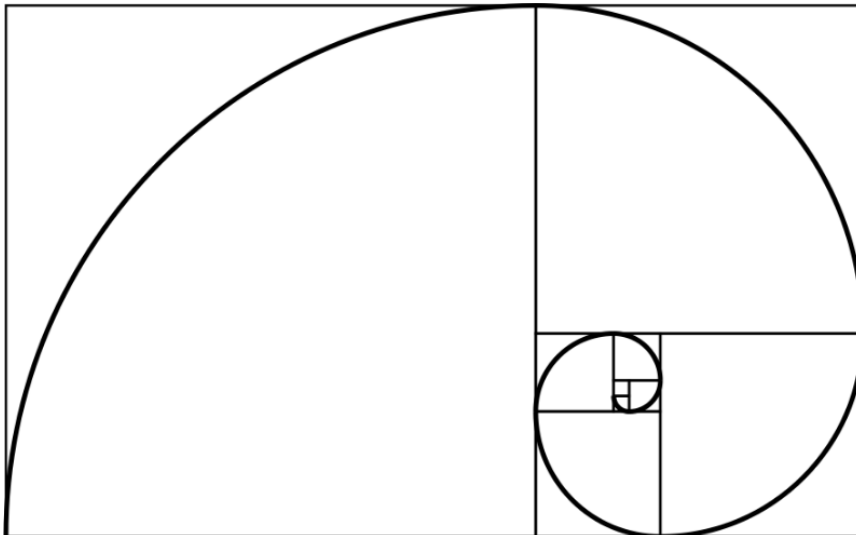
L'uomo Perfetto

Anche all'interno del corpo umano sono stati ricercati i valori di proporzione perfetti attraverso il rapporto aureo di alcune parti del corpo, ben rappresentate nell'opera Modulor, di Le Corbusier, nella quale non è difficile notare che la lunghezza da terra fino all'ombelico e quella totale dell'individuo siano in rapporto aureo, come quella delle falangi delle dita di una mano.



La Spirale Aurea

Un'altra importante costruzione che deriva dal numero di Fidia e quindi dalla serie di Fibonacci è la spirale aurea: essa è costituita dalla una serie infinita di quadrati che si possono ottenere all'interno di un rettangolo aureo e ottenuta attraverso gli archi all'interno di essi.



La spirale si sviluppa attorno ad un punto detto "occhio di Dio" e che coincide con il punto di intersezione della diagonale di ogni rettangolo.

La Spirale Cosmica

La Terra ed il sistema solare fanno parte della Via Lattea, galassia a forma di spirale ordinaria. Osservandone altre simili alla nostra si può notare come la forma della spirale assunta dalle braccia, composte da stelle, richiami fortemente la spirale aurea. Nel punto cosiddetto “occhio di Dio” della galassia è presente il centro di gravità, attorno al quale ruotano gli astri e che è costituito da un materiale ad altissima densità, probabilmente un buco nero.



Bibliografia e Sitografia

- Keithh Devin, I NUMERI MAGICI DI FIBONACCI, Rizzoli, Milano 2012
- Martin Gardner, CIRCO MATEMATICO, Sansoni Editore, Firenze 1981(Cap. 13)
- Marita Dante, ZAPPING, La Linea Editrice, 2010
- <http://www.liceoberchet.it/ricerche/sezioneaurea/>
- http://www.magiadeinumeri.it/Sezione_aurea.htm
- <http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/ferrarese/sito%20mostra/4-poliedri/sezione%20aurea.pdf>
- http://www.magiadeinumeri.it/Succ_num_fibo.htm
- <http://www.nonsolocittanova.it/fibonacci.htm>
- http://www.archweb.it/geometrie/serie_fibonacci.htm
- <http://www.vialattea.net/esperti/mat/fibonacci/>
- <http://www.math.it/spirale/fibonacci.htm>