Liceo scientifico sezione sperimentale P.N.I.

Alvise Cornaro

La crisi dei fondamenti della matematica nel primo Novecento

Relazione di Sergej Monavari

Anno scolastico 2012-2013

Indice

|  |
| --- |
| 1. Presentazione p.3 |
|  |
| 2. Matematica |
|  |
| 2.1 La crisi dei fondamenti della matematica p.3 |
|  |
| 2.2 Il Logicismo p.3 |
|  |
| 2.3 Il Formalismo p.4 |
|  |
| 2.4 I Teoremi di Incompletezza di Godel p.5 |
|  |
| 3. Fisica |
|  |
| 3.1 Le geometrie non euclidee p.6 |
|  |
| 3.2 La Relatività Generale p.7 |
|  |
| 3.3 I modelli di universo p.7 |
|  |
| 4. Filosofia |
|  |
| 4.1 Le interpretazioni dei Teoremi di Incompletezza p.8 |
|  |
| 4.2 La filosofia del linguaggio di Wittgenstein p.9 |
|  |

**1. Presentazione**

L’elaborato ripercorre la crisi dei fondamenti della matematica, dal tentativo logicista di Frege e Russell di fondare l’aritmetica sulla logica, al progetto formalista di Hilbert fino al suo fallimento con la dimostrazione dei Teoremi di Incompletezza di Godel; evidenzia quindi la struttura assiomatica della geometria nei modelli di possibile universo e propone l’interpretazione dei Teoremi di Incompletezza da parte di Wittgenstein.

Le materie prese in considerazione per il progetto multidisciplinare sono matematica, fisica e filosofia.

**2. Matematica**

**2.1 La crisi dei fondamenti della matematica**

La crisi dei fondamenti della matematica indica l’ampio dibattito che ha coinvolto, nei primi trent’anni del XX secolo, l’intera comunità di matematici e filosofi, sulla natura e origine della matematica, ovvero se ci siano e quali siano gli enti primitivi indimostrabili di questa disciplina.

Le principali posizioni filosofiche furono il Logicismo (Frege, Russell) il Formalismo (Hilbert) e l’Intuizionismo (Brouwer, Poincarè); tuttavia, la risoluzione di questo dibattito coinvolse un numero molto maggiore di matematici e filosofi, fino alla conclusione del dibattito con la dimostrazione, nel 1931, dei Teoremi di Incompletezza da parte di Godel.

**2.2 Il logicismo**

Il logicismo è il tentativo di ridurre la matematica ai concetti e alle regole della logica. Ogni concetto, teorema o legge della matematica può essere quindi dedotto e dimostrato dagli assiomi fondamentali della logica.

Il principale esponente del logicismo fu Gottlob Frege, matematico, filosofo e logico tedesco attivo tra la fine dell’Ottocento e la prima metà del Novecento. Il suo programma logicista si basava su due punti principali:

1. Definire in termini puramente logici tutti i concetti della matematica, primo tra tutti quello di numero naturale;
2. Derivare le “verità” matematiche a partire da principi logici, attraverso il *modus ponens* e le regole di inferenza.

Per fondare la matematica, e in particolare l’aritmetica, sulla logica, Frege compì due passaggi. Il primo fu quello di basare l’aritmetica sulla teoria degli insiemi; questa teoria era stata formalizzata dai matematici Cantor e Zermelo verso la fine dell’Ottocento. Inoltre, essi avevano mostrato evidenti connessioni tra la teoria degli insiemi e la logica: dimostrarono che ogni operazione sugli insiemi poteva essere formulata attraverso gli operatori della logica. Frege quindi credeva di poter costruire la teoria degli insiemi sulla base della logica, a sua volta l’aritmetica sulla teoria degli insiemi e la teoria dei numeri sull’aritmetica: quindi la matematica sulla logica.

Il primo concetto della matematica che Frege risolve nella teoria degli insiemi è quello di numero naturale. La definizione fregeana di numero cardinale riprende il concetto di Cantor di *equivalenza.* Per Cantor due insiemi si dicono equivalenti, o equipotenti, se contengono lo stesso numero di elementi; Frege riprende lo stesso concetto, utilizzando il termine *equinumerosità* ed indicando gli insiemi come *classi*. Un numero cardinale è, perciò, la classe di tutte le classi equinumerose: detto in parole più semplici, il numero 3 è l’insieme di tutte le terne, il 4 l’insieme di tutte le quaterne, lo 0 l’insieme di tutti gli insiemi vuoti. Ogni operazione matematica, basandosi sui numeri cardinali, si basa implicitamente su operazioni su insiemi (e quindi si basa sulla logica).

Frege capisce che attraverso il linguaggio comune non può fare uso delle operazioni della logica; crea perciò un efficace ma complesso sistema di segni formale che gli permetta di derivare ogni “verità” matematica attraverso le regole della logica.

Il crollo del progetto logicista di Frege avviene con la cosiddetta “Antinomia di Russell”. Russell era un logico e matematico gallese e, come Frege, fu anche filosofo. In una lettera del 1902 a Frege, espose la famosa antinomia. Suddividiamo tutti gli insiemi (classi) in due tipi: quelli che non appartengono a se stessi (*normali*) e quelli che appartengono a se stessi (*non normali*). Se noi consideriamo quindi l’insieme R di tutti gli insiemi che non contengono se stessi otteniamo un paradosso, o antinomia. Infatti, se R appartenesse a se stesso, andrebbe contro la sua definizione, ovvero di insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi. Se, invece, non contenesse se stesso, rientrerebbe nella sua definizione e ne farebbe quindi parte. Tale antinomia, posta da Frege in appendice ai suoi “Principi dell’aritmetica”, mostra il primo fallimento del progetto logicista.

Russell, che aveva evidenziato il paradosso nella teoria di Frege, propone una sua soluzione. Per Russell, infatti, il paradosso nasce quando in una definizione di un ente si implica la totalità, o classe, cui l’ente stesso appartiene. L’antinomia, perciò, rappresenta un’operazione illegittima che sfocia inevitabilmente in un paradosso. Egli propone perciò la *teoria dei tipi*. Secondo Russell, l’Universo deve essere in diviso in *categorie* o *tipi*, tali che al tipo 1 appartengano gli individui, o oggetti, al tipo 2 le classi di oggetti, al tipo 3 le classi di classi di oggetti e così via. Attraverso questa gerarchizzazione, Russell esclude automaticamente l’antinomia, non potendo essere stesse leggi o definizioni applicate a tipi diversi.

**2.3 Il Formalismo**

Nel 1900 il matematico David Hilbert, al Secondo Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi, espose una relazione contenente una lista di problemi della matematica “aperti”; il secondo di essi era proprio dimostrare la coerenza della matematica. Mentre il progetto logicista di Frege e Russell si proponeva di derivare l’aritmetica dalla teoria degli insiemi e quindi dalla logica, Hilbert cercava invece di fondare l’intera conoscenza matematica su una struttura assiomatica.

In primo luogo, Hilbert propone di formalizzare completamente l’aritmetica; riprendendo perciò i lavori già compiuti in questa direzione da Peano, traduce i principi aritmetici e logici in un linguaggio formale, in cui ad assumere importanza è solo la forma e non il significato. In questo modo, Hilbert separa l’aspetto *sintattico* della matematica (che riguarda la forma) da quello *semantico* (che ne riguarda il significato e la nozione di verità). Ogni teorema, perciò, assume la forma di proposizione all’interno di questo linguaggio formale. Trattando la matematica come puro linguaggio formale, nel quale ogni proposizione (teorema) diventa una stringa di segni, Hilbert la studia dal punto di vista di alcune proprietà fondamentali (dal punto di vista della sintassi) che saranno molto importanti più avanti ai fini della dimostrazione dei teoremi di Incompletezza di Godel:

*Coerenza*: un sistema è coerente se non dimostra sia un teorema sia la sua negazione;

*Completezza*: un sistema è completo se è sempre in grado di dimostrare un teorema o la sua negazione;

*Decidibilità*: un sistema è decidibile se esiste un procedimento meccanico (*algoritmo*) che permetta di dire di ogni enunciato se sia o meno un teorema.

A differenza di Euclide, che aveva la verità fondamentale dei suoi cinque postulati o di Peano, con i suoi rispettivi cinque postulati dell’aritmetica, Hilbert mostra come la costruzione di un sistema formale dipenda soltanto dalla scelta degli assiomi, che non godono più dell’aspetto semantico, e quindi di proprietà come verità e falsità. La matematica deve essere quindi in grado di porre dei postulati a piacere, con il solo limite della coerenza dei postulati stessi (per esempio non posso postulare sia un enunciato che la sua negazione).

Il problema divenne quindi quello della completezza e della decidibilità della matematica, nei cui confronti Hilbert era molto ottimista. Nel Congresso di Parigi del 1900 si pronunciò:

*La convinzione della risolubilità di ogni problema è un potente incentivo per il ricercatore.*

*Dentro di noi sentiamo il perpetuo richiamo: c’è un problema, cerchiamone la soluzione.*

*E la si può trovare con la sola ragione, perché in matematica non c’è nessun “ignorabimus”.*

La famosa lista di 23 problemi irrisolti che Hilbert presentò al Congresso rappresentava una sfida per i matematici del tempo, ma, nell’ottica di Hilbert, sarebbero stati tutti risolti.

Sebbene nel 1931 Godel ne dimostrò l’incompletezza, Hilbert può essere considerato il padre della metamatematica moderna, avendo separato l’aspetto sintattico della matematica in un sistema formale di segni e l’aspetto semantico in un linguaggio, o *metalinguaggio*, che possa fare considerazioni sul sistema formale in questione.

**2.4 I Teoremi di Incompletezza di Godel**

Kurt Godel fu un matematico e logico austriaco, noto non solo per la dimostrazione dei Teoremi di Incompletezza ma anche per molti altri lavori di indiscussa importanza.

Godel prende in considerazione il dilemma lasciato aperto da Hilbert all’inizio del secolo, se l’aritmetica sia un sistema completo o meno. Purtroppo, sebbene Hilbert ottimisticamente credesse che in matematica non ci fossero “ignorabimus”, Godel nel 1931 pubblica un articolo, intitolato “Su proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e sistemi affini”, in cui dimostra undici teoremi, due dei quali famosi sotto il nome di “Teoremi di Incompletezza”.

Questi teoremi pongono fine al grande dibattito sui fondamenti della matematica, in quanto Godel fa crollare sia le pretese logiciste di Frege e Russell sia il programma formalista di Hilbert.

Questi teoremi sono enunciati e dimostrati attraverso un rigoroso linguaggio formale; ne presenterò perciò una semplificazione e un accenno dei passaggi principali della dimostrazione, che permettono lo stesso di trarre interessanti conseguenze.

Il Primo teorema di Incompletezza (che chiameremo “G1”) afferma:

(G1) *Se S è un sistema formale corretto, in grado di esprimere una certa porzione dell’aritmetica, allora esiste un enunciato Gs formulato nel linguaggio L del sistema, tale che Gs è indecidibile in S, ossia né dimostrabile né refutabile.*

Analizziamo l’enunciato: Godel, innanzitutto, parla di un sistema S che esprima *una certa porzione dell’aritmetica*. Questa precisazione è necessaria in quanto i due teoremi presuppongono ipotesi diverse per essere dimostrati: ai fini dell’esposizione, però, basti sapere che questa “porzione dell’aritmetica” è esattamente quella cui si erano dedicati Frege e Hilbert. In secondo luogo, questo “sistema S” è espresso attraverso un linguaggio “L”; *possiamo* perciò lavorare con rigore e usare i concetti già identificati dagli autori precedenti (come coerenza e completezza). Perciò, se per ipotesi tale sistema fosse *corretto* (ovvero coerente sintatticamente) si può dimostrare che in tale sistema esiste un enunciato “Gs” (comunemente chiamato *enunciato godeliano* del sistema) che non può essere né dimostrato né refutato. Ma se esiste almeno un enunciato del genere, vuol dire che tale sistema è incompleto. Coerenza e completezza, perciò, sono proprietà che si escludono a vicenda da qualsiasi formalizzazione dell’aritmetica. Sull’enunciato godeliano tornerò più avanti, per instaurare un confronto con la filosofia di Wittgenstein.

Il secondo teorema (“G2”):

(G2) *Se S è un sistema formale corretto, in grado di esprimere una certa porzione dell’aritmetica,*

 *allora S non può provare la propria coerenza.*

Le premesse per questo teorema sono le stesse, sebbene la “porzione di aritmetica” presa in considerazione sia leggermente diversa da quella del Primo Teorema. Analizziamo, come prima, questo teorema. L’ipotesi, come prima, è che sia coerente sintatticamente (corretto). Paradossalmente, supporre per ipotesi la sua coerenza ci permette di dimostrare che tale coerenza non è provabile. In termini più semplici, ciò significa che non esiste una formalizzazione dell’aritmetica in grado di giustificarsi da sola; tale giustificazione deve essere formulata da un sistema più ampio (metasistema). Ciò si riconduce al “Principio di Tarski”; egli aveva in precedenza dimostrato, infatti, che la nozione di verità non si può attribuire dall’interno del sistema, ma da uno più ampio che lo comprenda. La coerenza, perciò, la posso soltanto postulare, ma mai dimostrare.

Vediamo, infine, più attentamente, l’enunciato godeliano. All’interno del sistema formalizzato, si può costruire un enunciato:

(G) *Questo enunciato non è dimostrabile.*

Come prima, l’enunciato presenta una forma molto più complessa, e questa è solo la sua espressione nel linguaggio comune. Si nota che questo enunciato è autoreferenziale, ovvero che “parla” di se stesso. Sempre all’interno del sistema, Godel prova che questo enunciato non si può dimostrare. Ma se io non lo posso dimostrare, questo enunciato è vero, siccome “dice” appunto di non essere dimostrabile. Anche se Hilbert aveva separato l’aspetto sintattico da quello semantico, Godel mostra come un enunciato possa essere vero, prescindendo dalla sua dimostrabilità.

Qual è quindi l’importanza dei lavori di Godel? In primo luogo, capisce come la matematica non possa avere dei principi su cui basarsi, andando contro le pretese del logicismo di Frege. Attraverso il primo Teorema di Incompletezza, vanifica il progetto formalista di Hilbert e le sue speranze sulla completezza dell’aritmetica. Potendo costruire degli enunciati autoreferenziali, demolisce la convinzione di Wittgenstein secondo cui essi prescindevano dalla struttura stessa del linguaggio e non avevano senso e la teoria dei tipi di Russell, che limitava le proposizioni formulabili e dotate di senso.

L’ultima analisi sui Teoremi di Incompletezza è il confronto con la posizione di Godel stesso. Godel, seppur membro del Circolo di Vienna per un certo periodo, era un *platonista*: credeva nella matematica come una realtà esistente, a differenza dell’ambiente positivista del periodo. Nonostante i teoremi da lui stesso dimostrati sembrino minare l’esistenza di questa “realtà matematica”, Godel riteneva che ad essere incompleto fosse soltanto il linguaggio che descrive tale realtà, lasciando intatta la sua convinzione e fede.

**3. Fisica**

**3.1 Le geometrie non euclidee**

Il profondo rinnovamento di alcune sezioni della matematica colpì anche la parte riguardante la geometria, considerata immutabile fin dalla sua descrizione dall’alessandrino Euclide nell’antica Grecia. Unica pecca della geometria che porta il suo nome, euclidea, è il quinto postulato. Mentre i primi quattro postulati definiscono concetti come “punto” o “retta”, il quinto postulato di Euclide afferma che “data una retta r e un punto P esterno ad essa, esiste una sola retta parallela alla retta data passante per P” (da cui deriva anche la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°). Euclide stesso, però, per quanto questa affermazione possa sembrare intuitiva, la utilizzò con molta cautela e dimostrò la maggior parte dei suoi teoremi senza farvi ricorso, se non quando era necessario. Dopo Euclide, moltissimi matematici provarono a dare una dimostrazione di questo enunciato, provandolo a derivare dagli altri quattro o riformulandolo in altro modo. Questi tentativi, tuttavia, si dimostrarono fallimentari, fino a quando, all’inizio dell’Ottocento, tre grandi matematici rivoluzionarono la concezione classica della geometria. Le controversie su chi fu il primo a mettere in evidenza i principali aspetti delle geometrie non euclidee sono molte; vengono riconosciuti, avendo lavorato contemporaneamente ed indipendentemente, Carl Friedriech Gauss, Nikolaj Ivanovič Lobačevskij e Janos Bolyai. L’intuizione che portò al successo questi tre matematici fu di non supporre che il postulato delle parallele fosse giusto a priori, ma che potesse essere opportunamente sostituito con un altro, dando vita ad una diversa geometria.

In particolare, Lobačevskij formulò la cosiddetta “geometria ellittica”: in essa, non esistono rette parallele ad una retta data, siccome tutte hanno dei punti di intersezione. Per poterci immaginare questo geometria, pensiamo alla superficie di una sfera: due rette che dovrebbero essere parallele si incontrano agli antipodi, e si possono costruire triangoli la cui somma degli angoli è maggiore di 180°. Successivamente, Bernard Riemann, matematico tedesco, formulò la “geometria iperbolica”: in essa, per ogni retta data si potevano costruire non una, bensì infinite rette parallele passanti per un punto esterno P.

Ma se la geometria non era più una sola, quale diveniva il suo ruolo? Kant, nella “Critica della ragion pura”, sosteneva che noi elaboriamo le nostre intuizioni sensibili attraverso lo spazio, il tempo e le dodici categorie: la nostra intuizione dello spazio fisico era regolata dalla geometria euclidea, il che la elevava alla forma stessa della nostra rappresentazione del mondo. La formulazione di geometrie alternative, però, selezionava il nostro Universo come uno dei tanti possibili, e non come l’unico logicamente ammissibile; l’assiomatizzazione, ovvero la possibilità di costruire una diversa geometria in base ad enunciati postulati a priori, permise lo sviluppo della fisica moderna nel primo Novecento.

**3.2 La Relatività Generale**

La creazione di geometrie diverse da quelle euclidee non restò a lungo un semplice gioco e artificio matematico; rilevazioni fatte su scale astronomiche hanno appurato che si possono disegnare nello spazio, effettivamente, triangoli la cui somma degli angoli è diversa da 180°. La nostra percezione dello spazio come geometria euclidea è solo apparente: in realtà, essa è solo una buona approssimazione.

Nel 1915, Einstein elaborò la relatività generale. Tale teoria rappresentava una forte rottura con il passato; essa descrive uno spazio (o meglio, uno spazio-tempo) la cui geometria varia localmente: ogni punto dello spazio, è “curvato” diversamente. Una curvatura nulla rappresenta la geometria euclidea, una curvatura positiva una geometria ellittica e una negativa una geometria iperbolica; Einstein descrisse questa curvatura locale con le sue famose equazioni di campo, notando come a determinare la curvatura fosse la presenza di massa ed energia (la cui distribuzione è descritta dal tensore impulso-energia).

Tuttavia, le equazioni di Einstein non danno risultati univoci: le sue soluzioni dipendono dai principi che supponiamo che l’universo preso in considerazione abbia. In base ad essi, si possono perciò derivare diversi modelli di universo, tutti logicamente possibili: sono solo le evidenze sperimentali che possono decretare quale sia più probabilmente il nostro.

**3.3 I modelli di universo**

I principali modelli di universo studiati sono sottoposti al “principio cosmologico”, che limita fortemente i possibili modelli studiabili. Tale principio suppone che il nostro universo sia *omogeneo* (ovvero mantiene tutte le sue proprietà indipendentemente dalla posizione) e *isotropo* (ovvero mantiene tutte le sue proprietà indipendentemente dalla direzione); tale omogeneità si nota qualora si studino porzioni di spazio dell’ordine di ammassi di galassie.

Studiando le equazioni di Einstein secondo il principio cosmologico, si ottengono, tre diversi tipi di universo: il discrimine è la densità dell’Universo rispetto ad una certa densità critica. Se la densità è maggiore di quella critica, si ottiene un universo a curvatura positiva, “sferico”; se la densità è minore, si ottiene un universo a curvatura negativa, “a sella di cavallo”; se la densità è uguale a quella critica, si ottiene un universo piatto.

Ad ogni modello di universo, inoltre, è associata una determinata “metrica”: la metrica di uno spazio (spazio-tempo) descrive lo spazio localmente e permette perciò di delineare la sua struttura globale. La metrica dei modelli con principio cosmologico è la *metrica di Robertson-Walker*; se noi invece studiamo come varia la curvatura attorno ad una massa sferica, non rotante e priva di carica elettrica, utilizziamo la *metrica di Schwarzschild*, che approssima molto bene lo studio di un corpo vicino a un buco nero; infine, nel caso più semplice di un universo piatto (regolato dalla classica geometria euclidea) consideriamo la *metrica di Minkowskij*.

Un ultimo modello cui vorrei prestare attenzione, anche se meno conosciuto, è il modello di universo di Godel; il noto matematico, infatti, si interessò delle equazioni di Einstein e propose egli stesso una soluzione consistente nel 1949. La particolarità di questo modello di universo è che non gode del principio cosmologico: è uno dei tanti universi che la metrica di Robertson-Walker aveva escluso, ma che può lo stesso fornire interessanti spunti di approfondimento. Questo modello rappresenta un universo omogeneo (come quelli studiati in precedenza) ma rotante su se stesso (non gode quindi della proprietà della isotropia: la simmetria radiale è rotta e viene a crearsi una direzione “preferita”). Ciò che rende originale questo modello, è la previsione di “linee di spazio-tempo chiuse”: in parole più semplici, considera possibile compiere un viaggio nel tempo, nel passato in particolare. Se studiamo il percorso possibile di un raggio di luce, infatti, notiamo come questo possa, pur mantenendo inalterato il tempo soggettivo, tornare nel punto con le stesse coordinate spazio-temporali del punto di partenza.

Per concludere, bisogna notare come i possibili modelli di universo, esattamente come i possibili sistemi aritmetici o possibili geometrie, non devono essere verosimili e conformi alla realtà dello spazio che ci circonda: l’assiomatizzazione mostra come non esistano verità matematiche o geometriche in sé, ma come esse dipendano unicamente dal sistema assiomatico che io scelgo di considerare vero a priori. In quest’ottica, i viaggi nel tempo previsti da Godel non rappresentano un paradosso, ma una possibilità. Il discrimine è il confronto con i dati sperimentali, che, in questo caso, non mostrano affinità tra le previsioni teoriche e gli effetti di *red-shift* della luce; il modello di Godel non è quindi il nostro universo.

**4. Filosofia**

**4.1 Le interpretazioni dei Teoremi di Incompletezza**

Dopo l’uscita, nel 1931, dei Teoremi di Incompletezza di Godel, ne furono date moltissime interpretazioni al di fuori della matematica, purtroppo molto spesso equivocandone il reale significato.

Una linea di pensiero, basandosi sulle proprietà dell’enunciato godeliano, sostiene la superiorità della mente sulla macchina. Una macchina, come un computer (ovvero una *macchina di Turing*) deve essere programmata attraverso un sistema di assiomi, che può considerare “veri” (la nozione di verità per una macchina è complessa, “vero” è ciò che è riconducibile agli assiomi di partenza del sistema) e degli algoritmi che gli permettano di derivare tutti gli altri enunciati (ogni iterazione dell’algoritmo è considerabile una dimostrazione). La macchina, però, riconosce come “veri” soltanto gli enunciati che è in grado di dimostrare partendo dagli assiomi: l’enunciato godeliano, che non è dimostrabile, sarà considerato indecidibile dalla macchina ma noi (il matematico che o mente umana che condivide lo stesso sistema assiomatico) lo vediamo come vero. Perciò, la mente umana deve essere dotata di un senso e nozione di “verità” che una macchina non potrà mai avere.

A interpretazioni serie come questa si sono affiancate altre molto più grossolane: per confutare la validità della Bibbia, alcuni hanno sostenuto che i teoremi di Godel affermassero la sua strutturale incompletezza, tralasciando che le ipotesi sono che il sistema sia coerente (cosa di cui loro stessi dubitano) ma soprattutto che a cadere sotto i teoremi sono sistemi aritmetici “sufficientemente potenti” (non di certo il caso di un testo religioso).

**4.2 La filosofia del linguaggio di Wittgenstein**

Wittgenstein fu un filosofo austriaco, figura molto importante all’interno del circolo di Vienna; si interessò dell’analisi del linguaggio e della matematica, sulla scia delle opere di Russell e Whitehead. La sua principale opera fu il “Tractatus logico-philosophicus”, scritta attraverso una serie di considerazioni, numerate accuratamente da 1 a 7 più delle cifre decimali che rappresentano enunciati in subordine agli enunciati principali; ne espongo alcuni, in particolare quelli in riferimento alla matematica ed ai teoremi di Godel.

3.03: *Non possiamo pensare nulla d’illogico, ché altrimenti dovremmo pensare illogicamente.*

Il punto di partenza di Wittgenstein è l’impossibilità di pensare in maniera illogica: ogni nostro pensiero, perciò, deve sottostare a delle regole, che, quali che siano, se non rispettate portano alla formulazione di proposizioni senza alcun significato. In questa categoria, rientrano tutte le proposizioni riguardanti la metafisica: per Wittgenstein esse non possono essere trattate e non si può fare considerazione alcuna.

4: *Il pensiero è la proposizione munita di senso.*

4.001: *La totalità delle proposizioni è il linguaggio.*

Attraverso questi due concisi aforismi, Wittgenstein sposta il discorso dal piano del pensiero a quello del linguaggio: i nostri pensieri possono essere formulati solamente attraverso proposizioni munite di senso, che rappresentano il fulcro dell’intera analisi wittengsteiniana.

3.14: *Il segno proposizionale consiste nell’essere i suoi elementi, le parole, in una determinata relazione l’uno all’altro.*

Su cosa si basa il linguaggio? Wittgenstein riconosce che, nella formulazione delle proposizioni, affinché esse siano dotate di senso compiuto, noi seguiamo certe regole, espresse mediante certi segni; ciò diviene evidente in un linguaggio particolare, il linguaggio della matematica, dove la relazione tra i segni è particolarmente importante. Ma il significato di un segno non può essere spiegato da qualcuno, prima di essere usato: il segno si giustifica da sé, mediante il proprio utilizzo. È appunto come viene usato che attribuisce significato ad un segno, e non una definizione data a priori. Nella produzione del secondo Wittgenstein, viene introdotta la nozione di *gioco linguistico*: esso rappresenta l’insieme delle regole linguistiche che sintetizza il significato dei segni (sempre espresso dal loro uso); diversi giochi linguistici possono dare vita a diversi linguaggi, che non possono essere confrontati e di cui non si può né instaurare una gerarchia né affermare che uno sia più vero degli altri. Wittgenstein quindi formula, sotto un altro aspetto, la stessa assiomatizzazione che in precedenza era stata applicata all’aritmetica ed alla geometria (e in generale alla matematica).

3.332: *Nessuna proposizione può enunciare qualcosa sopra se stessa, poiché il segno proposizionale non può essere contenuto in se stesso (ecco tutta la “teoria dei tipi”).*

In questo modo, Wittgenstein risolve l’antinomia di Russell. Il progetto logicista di Frege era destinato a fallire perché si interrogava su proposizioni su cui non aveva senso discutere, siccome erano autoreferenziali. Tuttavia, abbiamo visto che Godel, attraverso un ingegnoso procedimento, è riuscito a formulare una proposizione matematica autoreferenziale: quello che abbiamo denominato “enunciato godeliano”.

6.1261: *Nella logica processo e risultato sono equivalenti. (Perciò nessuna sorpresa).*

Quest’ultimo enunciato che propongo, a mio parere mostra la principale differenza tra la visione della matematica tra Godel e Wittgenstein. Riprendendo l’analisi dell’enunciato godeliano, abbiamo già visto come esso possa essere formulato in modo tale da essere auto-referenziale. Esso afferma di non poter essere dimostrato: e non potendo effettivamente essere dimostrato all’interno del sistema, esso si risolve essere vero, senza tuttavia essere stato dimostrato. Per Wittgenstein, ciò determina un paradosso: “processo e risultato sono equivalenti”, perciò a determinare il valore di una proposizione sono la sua dimostrazione e la possibilità di essere ridotta agli assiomi del sistema. Affermare che l’enunciato godeliano sia vero senza dimostrarlo appare privo di significato e paradossale. Godel, invece, scinde l’aspetto semantico da quello sintattico, e dichiara di poterlo “vedere” vero trascendendone la dimostrazione.

Questa controversia può essere spiegata nella diversa concezione della matematica dei due autori. Godel era un *platonista* (o *realista*, come si diceva a quel tempo): la matematica rappresenta una realtà, che esiste al di fuori di noi e che il matematico scopre in continuazione. È il linguaggio della matematica, che descrive questa realtà, ad essere stato dimostrato incompleto dai suoi teoremi, e non certo la realtà stessa. In quest’ottica, ha senso scindere il significato della proposizione matematica dalla sua dimostrazione, ottenuta attraverso il linguaggio.

Per Wittgenstein, la matematica non esiste in quanto tale e la sua posizione è di tipo *costruttivista*: essa è solo un linguaggio come un altro, regolato da giochi linguistici e da regole ben precise. La matematica coincide con il linguaggio della matematica; fare considerazioni su una proposizione che non si può dimostrare è paradossale ed inutile. Il matematico non “scopre”, ma “inventa”: un esempio è l’espansione decimale infinita delle cifre dei numeri irrazionali. Se per Godel l’espansione esiste in sé, e viene solo scoperta, per i costruttivisti essa viene appunto “costruita”: l’espansione di un numero irrazionale viene inventata e costruita partendo dalle regole del sistema. Chiedersi quale sia la prossima cifra quando questa non sia ancora stata calcolata è come chiedersi, per Wittgenstein, se il protagonista di un romanzo abbia una sorella, fintanto che l’autore non lo abbia ancora deciso.

Per concludere, Godel e Wittgenstein sono stati due dei più grandi autori della prima metà del Novecento; hanno fornito entrambi, diversamente, una soluzione al grande dibattito sui fondamenti della matematica, ambito della logica, punto di unione della filosofia e della matematica, aprendo molte nuove vie da studiare.

**Bibliografia**

Berto, Francesco, *Tutti pazzi per Godel!*, 2^ed., Bari, Editori Laterza, 2010

Boyer, Carl B., *Storia della matematica*, cap. 24, Milano, Istituto Editoriale Internazione, 1976

Kline, Morris, *Storia del pensiero matematico,* vol. 2 cap. 36, 37, 51, Torino, Giulio Einaudi Editore, 1991

Odifreddi, Piergiorgio, *Le menzogne di Ulisse,* 3^ed., Milano, Longanesi & C., 2004

Sbisà, Marina, *Che cosa ha “veramente” detto Wittgenstein*, Roma, Astrolabio - Ubaldini Editore, 1975

Wittgenstein, Ludwig, a cura di Aldo G. Gargani, *Scritti scelti*, Milano, Principato Editore, 1970

**Sitografia**

Buser M., Kajari E. and Schleich W. P*., Visualization of the Go ̈del universe,* <http://arxiv.org/abs/1303.465> 20 marzo 2013

Godel, Kurt, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica And Related Systems,* <http://jacqkrol.x10.mx/assets/articles/godel-1931.pdf>, 2 aprile 2013